Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

1. Übungsblatt

21. Oktober 2009

Aufgabe 46 (Meromorphe Fortsetzung der RIEMANN'schen ζ–Funktion)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ konvergiert!

b) Zeigen Sie für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(s) > 1$

$$\zeta\,(s) = \frac{2^s}{2-2^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s} \quad !$$

Aufgabe 47 (Identitätssatz für DIRICHLETreihen)
Seien $\mathbb{H} := \{s \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}\,(s) > 1\}$, $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$, und $b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & b_n \end{array} \right\}$ derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$ absolut konvergent und holomorph in s sind und eine Folge $z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{H} \\ \ell & \mapsto & z_\ell \end{array} \right\}$ mit $\lim_{\ell\to\infty} \mathrm{Re}\,(z_\ell) = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z_\ell}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{z_\ell}}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ existiert.
Zeigen Sie, dass $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt!

Aufgabe 48 (Zweite MÖBIUS'sche Umkehrformel)
Seien $\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{R} |\, x \geq 1\}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ und $F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F\,(x) \end{array} \right\}$.

Sei $G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & G\,(x) := \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} F\left(\frac{x}{n}\right) \end{array} \right\}$.

a) Zeigen Sie für alle $x \in \mathcal{D}$

$$F\,(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \mu\,(n) \cdot G\left(\frac{x}{n}\right) \quad !$$

b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathcal{D}$

$$\left| \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\mu\,(n)}{n} \right| \leq 1 + \frac{1}{x} \quad !$$