Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

2. Übungsblatt — Musterlösung

28. Oktober 2009

Aufgabe 49 (Klausuraufgabe 6 aus der elementaren Zahlentheorie)

a) Stellen Sie die zweite Ableitung von ζ auf $\mathbb{H}$ als Dirichlet–Reihe dar!

b) Finden Sie eine Darstellung der zweiten logarithmischen Ableitung von ζ als Dirichlet–Reihe auf $\mathbb{H}$!

c) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 47

$$\Lambda \cdot \ln + \Lambda * \Lambda = \mu * \ln^2 \quad !$$

Lösung:
Sämtliche Ableitungen vertauschen nach dem Satz von Weierstrass 0.3 mit der Summation.

a) Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{n^s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-s\cdot\ln(n)} = -\frac{\ln(n)}{n^s}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit dem Satz von Weierstrass 0.3 für alle $s \in \mathbb{H}$

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\ln(n)}{n^s}\right).$$

Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-\frac{\ln(n)}{n^s}\right) = -\ln(n)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-s\cdot\ln(n)} = \frac{\ln^2(n)}{n^s}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit dem Satz von Weierstrass 0.3 für alle $s \in \mathbb{H}$

$$\zeta''(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n)}{n^s}.$$

b) Nach Beispiel 7.5 (ii) ist $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)$ für alle $s \in \mathbb{H}$.

Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right) = -\Lambda(n)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-s\cdot\ln(n)} = \frac{\Lambda(n)\cdot\ln(n)}{n^s}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit dem Satz von Weierstrass 0.3 für alle $s \in \mathbb{H}$

$$\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)\cdot\ln(n)}{n^s}.$$

c) Für alle $s \in \mathbb{H}$ gilt nach der Quotientenregel

$$\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(s) + \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)^2 = \frac{\zeta''(s)\cdot\zeta(s) - \zeta'(s)\cdot\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} + \frac{\zeta'(s)\cdot\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} = \frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)}.$$

Nach Beispiel 7.5 (i) gilt $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(s)}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$. Mit Aufgabenteil a), Aufgabenteil b), dem Produktsatz für DIRICHLET–Reihen 7.4 und der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen folgt für alle $s \in \mathbb{H}$

$$\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)'(s) + \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Lambda \cdot \ln + \Lambda * \Lambda)(n)}{n^s}$$

und

$$\frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\mu * \ln^2\right)(n)}{n^s}.$$

Die Behauptung folgt direkt aus Aufgabe 47 — angewandt zum Beispiel auf die Folge

$$z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ \ell & \mapsto & z_\ell := \ell + 1 \end{array} \right\}.$$

Aufgabe 50 (Nicht jede holomorphe Funktion kann als DIRICHLET–Reihe geschrieben werden)
Geben Sie ein $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und eine Funktion an, die für kein $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ in der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma\}$ als DIRICHLET–Reihe geschrieben werden kann, jedoch auf $\{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$ holomorph ist.

Lösung:
Seien

$$\sigma_0 := -\infty \qquad \text{und} \qquad f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & f(s) := s \end{array} \right\}.$$

f ist holomorph auf ganz $\mathbb{C} = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$.
Annahme: Es gibt ein $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und eine Folge $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \right\}$ mit $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \sigma$.
Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der DIRICHLET–Reihe folgt dann

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in \mathbb{R}}} f(s) = \lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in \mathbb{R}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\substack{s \to \infty \\ s \in \mathbb{R}}} \frac{a_n}{n^s} = a_1.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\lim\limits_{\substack{s \to \infty \\ s \in \mathbb{R}}} f(s) = \lim\limits_{\substack{s \to \infty \\ s \in \mathbb{R}}} s = \infty$.

Aufgabe 51 (ζ–Identitäten)

a) Zeigen Sie $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$!

b) Zeigen Sie $\dfrac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\#\{p\in\mathbb{P} | p|n\}}}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$!

c) Zeigen Sie $\dfrac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#\{d \in \mathbb{N} \,|d\,|n^2\}}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$!

Lösung:

a) Sei $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \text{ ist} \\ 0, & \text{falls } \sqrt{n} \notin \mathbb{N} \text{ ist} \end{cases} \end{array} \right\}$.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $(m,n) = 1$ ist mn genau dann eine Quadratzahl, wenn m und n Quadratzahlen sind.

Sind nämlich $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, dass mn eine Quadratzahl ist, n aber nicht, so gibt es ein $p \in \mathbb{P}$, das in der Primfaktorzerlegung von mn in gerader und in der Primfaktorzerlegung von n in ungerader Potenz auftritt. Deshalb ist p also ein Primteiler von m und es wäre $(m,n) > 1$.

Also ist f multiplikativ. μ^2 ist mit μ auch multiplikativ.

Für alle $p \in \mathbb{P}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\left(f * \mu^2\right)\left(p^{2k}\right) &= \sum_{d|p^{2k}} f(d) \cdot \mu^2\left(\frac{p^{2k}}{d}\right) = \sum_{j=0}^{2k} f\left(p^j\right) \cdot \mu^2\left(p^{2k-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \mu^2\left(p^{2k-2j}\right) = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\mu^2\left(\left(p^2\right)^{k-j}\right)}_{=0 \text{ für } j<k} = 1 = \mathbb{1}\left(p^{2k}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(f * \mu^2\right)\left(p^{2k+1}\right) &= \sum_{d|p^{2k+1}} f(d) \cdot \mu^2\left(\frac{p^{2k+1}}{d}\right) = \sum_{j=0}^{2k+1} f\left(p^j\right) \cdot \mu^2\left(p^{2k+1-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \mu^2\left(p^{1+2k-2j}\right) = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\mu^2\left(p \cdot \left(p^2\right)^{k-j}\right)}_{=0 \text{ für } j<k} = 1 = \mathbb{1}\left(p^{2k+1}\right).\end{aligned}$$

Da $\mathbb{1}$ multiplikativ ist, folgt $f * \mu^2 = \mathbb{1}$.

Mit Satz 7.4 folgt für alle $s \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2\right)^s}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}\right) = \zeta(2s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}.\end{aligned}$$

b) Seien $\omega : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \omega(n) := \#\{p \in \mathbb{P} | \, p|n\} \end{array} \right\}$ und $\tilde{\omega} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \tilde{\omega}(n) := 2^{\omega(n)} \end{array} \right\}$.

In der elementaren Zahlentheorie wurde gezeigt, dass ω additiv ist.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $(m, n) = 1$ folgt

$$\tilde{\omega}(mn) = 2^{\omega(mn)} = 2^{\omega(m)+\tau(n)} = 2^{\omega(m)} \cdot 2^{\omega(n)} = \tilde{\omega}(m) \cdot \tilde{\omega}(n) .$$

Insbesondere ist $\tilde{\omega}$ multiplikativ.

Mit μ ist auch μ^2 multiplikativ. Außerdem ist $\mathbb{1}$ multiplikativ.

Für alle $q \in \mathbb{P}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\mathbb{1} * \mu^2\right)\left(q^k\right) = \sum_{d \left| q^k\right.} \mathbb{1}(d) \cdot \mu^2 \left(\frac{q^k}{d}\right) = \sum_{j=0}^{k} \mu^2\left(q^{k-j}\right) = 1 + 1 = 2^1 = 2^{\#\left\{p \in \mathbb{P} | p \left| q^k \right.\right\}}.$$

Damit folgt $\mathbb{1} * \mu^2 = \tilde{\omega}$ und mit Aufgabenteil a) folgt die Behauptung aus Satz 7.4.

c) Seien $\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \tau(n) := \#\{d \in \mathbb{N} | \, d|n\} \end{array} \right\}$ und $\tilde{\tau} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \tilde{\tau}(n) := \tau\left(n^2\right) \end{array} \right\}$.

In der elementaren Zahlentheorie wurde gezeigt, dass τ multiplikativ ist.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $(m, n) = 1$ gilt $(m^2, n^2) = 1$ und damit folgt

$$\tilde{\tau}(mn) = \tau\left((mn)^2\right) = \tau\left(m^2 \cdot n^2\right) = \tau\left(m^2\right) \cdot \tau\left(n^2\right) = \tilde{\tau}(m) \cdot \tilde{\tau}(n) .$$

Insbesondere ist $\tilde{\tau}$ multiplikativ.

Nach Aufgabenteil b) ist $\tilde{\omega}$ multiplikativ. Außerdem ist $\mathbb{1}$ multiplikativ.

Für alle $q \in \mathbb{P}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{1} * \tilde{\omega}\right)\left(q^k\right) &= \sum_{d \left| q^k\right.} \mathbb{1}(d) \cdot \tilde{\omega}\left(\frac{q^k}{d}\right) = \sum_{j=0}^{k} \underbrace{2^{\#\left\{p \in \mathbb{P} | p \left| q^{k-j} \right.\right\}}}_{\substack{= 2^0 \text{ für } k-j=0 \\ = 2^1 \text{ für } k-j>0}} \\ &= 1 + 2 \cdot k = \#\left\{d \in \mathbb{N} \left| d \left| q^{2k} \right.\right.\right\} = \#\left\{d \in \mathbb{N} \left| d \left| \left(q^k\right)^2 \right.\right.\right\} . \end{aligned}$$

Damit folgt $\mathbb{1} * \tilde{\omega} = \tilde{\tau}$ und mit Aufgabenteil b) folgt die Behauptung aus Satz 7.4.