Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

4. Übungsblatt

11. November 2009

Sei $\mathbb{H} := \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > 1\}$.
Eine Funktion $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ heißt **(Dirichlet–)Charakter modulo q** $\in \mathbb{N}$, falls χ vollständig multiplikativ und q–periodisch mit $\{n \in \mathbb{Z} | \chi(n) = 0\} = \{n \in \mathbb{Z} | (n,q) \neq 1\}$ ist.
Für alle $q \in \mathbb{N}$ heißt

$$\chi_{0,q} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi_{0,q}(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } (q,n) = 1 \text{ ist} \\ 0, & \text{falls } (q,n) \neq 1 \text{ ist} \end{cases} \end{array} \right\}$$

(Dirichlet–)Hauptcharakter modulo q.
Für alle Dirichlet–Charaktere $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ und alle $s \in \mathbb{H}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ absolut konvergent. Gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $\chi = \chi_{0,q}$, so ist die zugehörige Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph fortsetzbar, andernfalls auf ganz $\mathbb{C}$.
Für alle Charaktere $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ und $\mathcal{D}_\chi := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\}, & \text{falls es ein } q \in \mathbb{N} \\ & \text{mit } \chi = \chi_{0,q} \text{ gibt} \\ \mathbb{C}, & \text{sonst} \end{cases}$

heißt die auf $\mathcal{D}_\chi$ holomorphe Funktion $L(\,\cdot\,,\chi) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_\chi & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & L(s,\chi) \end{array} \right\}$ mit $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$ **Dirichlet'sche L–Funktion zum Charakter χ**.
Für alle Charaktere $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ und alle $s \in \mathbb{H}$ ist $L(s,\chi) \neq 0$.

Aufgabe 55 (Dirichlet–Charaktere)

a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ auch χ^k ein Dirichlet–Charakter ist!

b) Geben Sie 4 Charaktere modulo 8 an!

c) Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ ein Dirichlet–Charakter modulo q.

Zeigen Sie $\sum_{\substack{n=1 \\ (q,n)=1}}^{q} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q), & \text{falls } \chi = \chi_{0,q} \text{ ist;} \\ 0, & \text{falls } \chi \neq \chi_{0,q} \text{ ist!} \end{cases}$

bitte wenden

Aufgabe 56 (Zum EULER–Produkt)
Seien $q \in \mathbb{N}$, $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ ein DIRICHLET–Charakter modulo q, $q_1 \in \mathbb{N}$ und $\chi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi_1(n) \end{array} \right\}$ ein DIRICHLET–Charakter modulo q_1 mit

$$\chi(n) = \chi_1(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } (q, n) = 1.$$

a) Zeigen Sie für alle $s \in \mathcal{D}_\chi$

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid q}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) \quad !$$

b) Finden Sie für alle $s \in \mathbb{H}$ eine geschlossene Darstellung von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \cdot \chi(n)}{n^s}$!

Aufgabe 57 (Vergleich der Nullstellen zweier L–Funktionen)
Seien $q \in \mathbb{N}$, $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ ein DIRICHLET–Charakter modulo q, $q_1 \in \mathbb{N}$ und $\chi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi_1(n) \end{array} \right\}$ ein DIRICHLET–Charakter modulo q_1 mit

$$\chi(n) = \chi_1(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } (q, n) = 1$$

und

$$L(\mathrm{i}t, \chi_1) \neq 0 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Geben Sie sämtliche $\varrho \in \mathcal{D}_\chi \setminus \{0\}$ mit $L(\varrho, \chi) = 0$ und $L(\varrho, \chi_1) \neq 0$ an!