Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

4. Übungsblatt — Musterlösung

11. November 2009

Sei $\mathbb{H} := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(s) > 1\}$.
Eine Funktion $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ heißt **(Dirichlet–)Charakter modulo q** $\in \mathbb{N}$, falls χ vollständig multiplikativ und q–periodisch mit $\{n \in \mathbb{Z} \mid \chi(n) = 0\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid (n, q) \neq 1\}$ ist.
Für alle $q \in \mathbb{N}$ heißt

$$\chi_{0,q} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi_{0,q}(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } (q,n) = 1 \text{ ist} \\ 0, & \text{falls } (q,n) \neq 1 \text{ ist} \end{cases} \end{array} \right\}$$

(Dirichlet–)Hauptcharakter modulo q.
Für alle Dirichlet–Charaktere $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ und alle $s \in \mathbb{H}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ absolut konvergent. Gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $\chi = \chi_{0,q}$, so ist die zugehörige Funktion auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ holomorph fortsetzbar, andernfalls auf ganz $\mathbb{C}$.
Für alle Charaktere $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ und $\mathcal{D}_\chi := \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\}, & \text{falls es ein } q \in \mathbb{N} \text{ mit } \chi = \chi_{0,q} \text{ gibt} \\ \mathbb{C}, & \text{sonst} \end{cases}$
heißt die auf $\mathcal{D}_\chi$ holomorphe Funktion $L(\,\cdot\,, \chi) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_\chi & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & L(s,\chi) \end{array} \right\}$ mit $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{H}$ **Dirichlet'sche L–Funktion zum Charakter χ**.
Für alle Charaktere $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ und alle $s \in \mathbb{H}$ ist $L(s,\chi) \neq 0$.

Aufgabe 55 (Dirichlet–Charaktere)

a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ auch χ^k ein Dirichlet–Charakter ist!

b) Geben Sie 4 Charaktere modulo 8 an!

c) Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ ein Dirichlet–Charakter modulo q.

Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ (q,n)=1}}^{q} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(q), & \text{falls } \chi = \chi_{0,q} \text{ ist;} \\ 0, & \text{falls } \chi \neq \chi_{0,q} \text{ ist!} \end{cases}$

Lösung:

a) Seien $k \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ und $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ ein Dirichlet–Charakter modulo q.

Für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\chi^k(mn) = (\chi(mn))^k = (\chi(m) \cdot \chi(n))^k = (\chi(m))^k \cdot (\chi(n))^k = \chi^k(m) \cdot \chi^k(n)$$

und

$$\chi^k(n+q) = (\chi(n+q))^k = (\chi(n))^k = \chi^k(n).$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\chi^k(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\chi(n))^k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \chi(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (q,n) = 1.$$

b) Sei $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ ein Charakter modulo 8. Wegen $\chi(n+8) = \chi(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ genügt es, die Werte von χ auf $\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ anzugeben, um χ vollständig zu bestimmen.

Wegen $\chi(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $(8,n) \neq 1$ sind

$$\chi(0) = 0, \qquad \chi(2) = 0, \qquad \chi(4) = 0 \qquad \text{und} \qquad \chi(6) = 0.$$

Aus der vollständigen Multiplikativität von χ folgt

$$\chi(1) = 1.$$

Aus der vollständigen Multiplikativität und der 8–Periodizität von χ folgt

$$(\chi(3))^2 = \chi\left(3^2\right) = \chi(9) = \chi(1) = 1,$$
$$(\chi(5))^2 = \chi\left(5^2\right) = \chi(25) = \chi(1) = 1$$

und

$$(\chi(7))^2 = \chi\left(7^2\right) = \chi(49) = \chi(1) = 1.$$

Also ist

$$(\chi(3), \chi(5), \chi(7))^T \in \{-1;1\}^3.$$

Wiederum aus vollständiger Multiplikativiät und 8–Periodizität ergibt sich

$$\chi(3) \cdot \chi(5) = \chi(15) = \chi(7),$$
$$\chi(5) \cdot \chi(7) = \chi(35) = \chi(3),$$
$$\chi(7) \cdot \chi(3) = \chi(21) = \chi(5)$$

und

$$\chi(3) \cdot \chi(5) \cdot \chi(7) = \chi(3 \cdot 5 \cdot 7) = \chi(105) = \chi(1) = 1.$$

Damit lassen sich 4 Charaktere modulo 8 wie folgt angeben:

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	−1	0	−1
0	1	0	−1	0	1	0	−1
0	1	0	−1	0	−1	0	1

c) Ist $\chi = \chi_{0,q}$, so folgt

$$\sum_{\substack{n=1\\(q,n)=1}}^{q} \chi(n) = \sum_{\substack{n=1\\(q,n)=1}}^{q} \chi_{0,q}(n) = \sum_{\substack{n=1\\(q,n)=1}}^{q} 1 = \#\{n \in \mathbb{N} | \, n \leq q \text{ und } (q,n) = 1\} = \varphi(q).$$

Ist $\chi \neq \chi_{0,q}$, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\chi(k) \notin \{0; 1\}$.

Wegen $\chi(k) \neq 0$ folgt $(q,k) = 1$.

Deshalb ist $\{k\ell \in \mathbb{Z} | \, \ell \in \mathcal{R}\}$ für jedes reduzierte Restsystem $\mathcal{R}$ modulo q wieder ein reduziertes Restsystem modulo q.

Mit der vollständigen Multiplikativität von χ folgt

$$\chi(k) \cdot \sum_{\substack{n=1\\(q,n)=1}}^{q} \chi(n) = \sum_{\substack{\ell=1\\(q,\ell)=1}}^{q} \chi(k) \cdot \chi(\ell) = \sum_{\substack{\ell=1\\(q,\ell)=1}}^{q} \chi(k\ell) = \sum_{\substack{n=1\\(q,n)=1}}^{q} \chi(n).$$

Wegen $\chi(k) \notin \{0; 1\}$ bleibt nur

$$\sum_{\substack{n=1\\(q,n)=1}}^{q} \chi(n) = 0.$$

Aufgabe 56 (Zum Euler–Produkt)
Seien $q \in \mathbb{N}$, $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ ein Dirichlet–Charakter modulo q, $q_1 \in \mathbb{N}$ und $\chi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi_1(n) \end{array} \right\}$ ein Dirichlet–Charakter modulo q_1 mit

$$\chi(n) = \chi_1(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } (q,n) = 1.$$

a) Zeigen Sie für alle $s \in \mathcal{D}_\chi$

$$L(s,\chi) = L(s,\chi_1) \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{P}\\p|q}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) \quad !$$

b) Finden Sie für alle $s \in \mathbb{H}$ eine geschlossene Darstellung von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \cdot \chi(n)}{n^s}$!

Lösung:

a) Sei $s \in \mathbb{H}$. Dann gilt für alle Charaktere $\upsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \upsilon(n) \end{array} \right\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\upsilon(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} = \zeta(\mathrm{Re}(s)) < \infty.$$

Aus dem EULER'schen Produktsatz folgt für alle Charaktere $\upsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \upsilon(n) \end{array} \right\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\upsilon(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\upsilon\left(p^\ell\right)}{\left(p^\ell\right)^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\upsilon(p)}{p^s} \right)^\ell = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\upsilon(p)}{p^s}}$$

wegen

$$\left| \frac{\upsilon(p)}{p^s} \right| \leq \frac{1}{p^{\mathrm{Re}(s)}} < \frac{1}{p} < 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\upsilon(mn)}{(mn)^s} = \frac{\upsilon(m)}{m^s} \cdot \frac{\upsilon(n)}{n^s}$$

für alle $p \in \mathbb{P}$, alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} & &= \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ (p,q)=1}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid q}} 1 \\ &= \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ (p,q)=1}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}} \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid q}} \frac{1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}}{1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}} & &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}} \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid q}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) \\ &= L(s, \chi_1) \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid q}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right). \end{aligned}$$

b) Nach Aufgabenteil a) gilt für alle $z \in \mathbb{H}$ und alle Charaktere $\upsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \upsilon(n) \end{array} \right\}$

$$L(z, \upsilon) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\upsilon(p)}{p^z}}.$$

Sei $s \in \mathbb{H}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $(m, n) = 1$ gilt

$$\frac{\mu^2(mn) \cdot \chi(mn)}{(mn)^s} = \frac{\mu^2(m) \cdot \chi(m)}{m^s} \cdot \frac{\mu^2(n) \cdot \chi(n)}{n^s}.$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\mu^2(n) \cdot \chi(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} = \zeta(\mathrm{Re}(s)) < \infty$$

folgt aus dem EULER'schen Produktsatz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \cdot \chi(n)}{n^s} &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mu^2\left(p^\ell\right) \cdot \chi\left(p^\ell\right)}{\left(p^\ell\right)^s} = \frac{L(s, \chi)}{L(s, \chi)} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \\ &= L(s, \chi) \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \cdot \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) \\ &= L(s, \chi) \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi^2(p)}{p^{2s}}\right) = \frac{L(s, \chi)}{L(2s, \chi^2)}, \end{aligned}$$

da nach Aufgabe 55 a) auch χ^2 ein DIRICHLET–Charakter ist.

Aufgabe 57 (Vergleich der Nullstellen zweier L–Funktionen)
Seien $q \in \mathbb{N}$, $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi(n) \end{array} \right\}$ ein Dirichlet–Charakter modulo q, $q_1 \in \mathbb{N}$ und $\chi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \chi_1(n) \end{array} \right\}$ ein Dirichlet–Charakter modulo q_1 mit

$$\chi(n) = \chi_1(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } (q, n) = 1$$

und

$$L(\mathrm{i}t, \chi_1) \neq 0 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Geben Sie sämtliche $\varrho \in \mathcal{D}_\chi \setminus \{0\}$ mit $L(\varrho, \chi) = 0$ und $L(\varrho, \chi_1) \neq 0$ an!

Lösung:
Für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $(q, n) = 1$ ist $|\chi(n)| = 1$ wegen

$$1 = \chi(1) = \chi\left(n^{\mathrm{ord}_q(n)}\right) = (\chi(n))^{\mathrm{ord}_q(n)}.$$

Nach Aufgabe 56 a) gilt für alle $s \in \mathcal{D}_\chi$

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p|q}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\varrho}\right).$$

Ist also $\varrho \in \mathcal{D}_\chi$ mit $L(\varrho, \chi) = 0$ und $L(\varrho, \chi_1) \neq 0$, so folgt

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p|q}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^\varrho}\right) = 0.$$

Da es sich um ein endliches Produkt handelt, und $\chi(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p|q_1$ ist, gibt es also für jedes $\varrho \in \mathcal{D}_\chi$ mit $L(\varrho, \chi) = 0$ und $L(\varrho, \chi_1) \neq 0$ ein $p_\varrho \in \mathbb{P}$ mit $p_\varrho|q$, $(p_\varrho, q_1) = 1$ und

$$\frac{\chi(p_\varrho)}{p_\varrho^\varrho} = 1.$$

Für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p|q$ und $(p, q_1) = 1$ ist $|\chi(p)| = 1$ und deshalb gibt es ein $b_p \in \mathbb{R}$ mit

$$\log(\chi(p)) = 2\pi\mathrm{i} \cdot b_p.$$

Für alle $\varrho \in \mathcal{D}_\chi$ mit $L(\varrho, \chi) = 0$ und $L(\varrho, \chi_1) \neq 0$ gibt es also ein $k_\varrho \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varrho = \frac{\log(\chi(p_\varrho)) + 2\pi\mathrm{i} \cdot k_\varrho}{\log(p_\varrho)} = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{b_{p_\varrho} + k_\varrho}{\ln(p_\varrho)}.$$

Andererseits gilt für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p|q$, $(p, q_1) = 1$ und alle $k \in \mathbb{Z}$

$$1 - \frac{\chi(p)}{p^{2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{b_p + k}{\ln(p)}}} = 1 - \frac{\chi(p)}{\mathrm{e}^{\log(\chi(p)) + 2\pi\mathrm{i} \cdot k}} = 1 - \frac{\chi(p)}{\chi(p)} = 0$$

und deshalb

$$L\left(2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{b_p + k}{\ln(p)}, \chi\right) = 0.$$

Wegen $L(\mathrm{i}t, \chi_1) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folgt

$$\begin{aligned} &\{\varrho \in \mathcal{D}_\chi \setminus \{0\} | \, L(\varrho, \chi) = 0 \text{ und } L(\varrho, \chi_1) \neq 0\} \\ &\qquad = \left\{ 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{b_p + k}{\ln(p)} \in \mathbb{C} \,\middle|\, p \in \mathbb{P}, p|q, (p, q_1) = 1 \text{ und } k \in \mathbb{Z} \setminus \{-b_p\} \right\}. \end{aligned}$$