Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

6. Übungsblatt

25. November 2009

Aufgabe 61 (Beweis für $\zeta(1+\mathrm{i}t) \neq 0$ nach INGHAM (1930))
Für alle $z \in \mathbb{C}$ sei $P_z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & P_z(n) := n^z \end{array} \right\}$.

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von LANDAU aus Aufgabe 58, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ absolut konvergiert, falls $t \in \mathbb{R}$ mit $\zeta(1+\mathrm{i}t) = 0$ ist!

b) Zeigen Sie
$$|\zeta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2 \geq \zeta(2\sigma) \qquad \text{für alle } \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } \sigma > \tfrac{1}{2},$$
falls $t \in \mathbb{R}$ mit $\zeta(1+\mathrm{i}t) = 0$ ist, und folgern Sie die Nullstellenfreiheit von ζ auf $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) = 1\}$!

Tipp: Verwenden Sie $|(P_z * \mathbb{1})(n)|^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und alle $z \in \mathbb{C}$!

LAPLACE–Transformation

Sei $\mathcal{D} := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ sei $\mathbb{H}_\sigma := \{s \in \mathbb{R} | \mathrm{Re}(s) > \sigma\}$.
Für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ und alle $T \in \mathcal{D}$ heißt $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\}$ **von der exponentiellen Ordnung $\boldsymbol{\sigma}$ ab $\boldsymbol{T}$**, falls es ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit
$$|f(t)| \leq C\mathrm{e}^{\sigma t} \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{D} \text{ mit } t \geq T$$
gibt.
Sind $\sigma \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{D}$ und $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\}$ von der exponentiellen Ordnung σ ab T derart, dass $\int_0^T |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$ ist, so konvergiert $\int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t$ für alle $s \in \mathbb{H}_\sigma$ absulot.
Für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ sei
$$\mathcal{L}(\sigma) := \left\{ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\} \middle| \begin{array}{l} \text{es gibt ein } T \in \mathcal{D}, \text{ so dass } f \text{ von der exponentiellen} \\ \text{Ordnung } \sigma \text{ ab } T \text{ ist und } \int_0^T |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty \text{ gilt} \end{array} \right\}.$$
Für ein $\sigma \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\} \in \mathcal{L}(\sigma)$ wird die **LAPLACE–Transformierte $\boldsymbol{L_f}$ von $\boldsymbol{f}$** definiert durch
$$L_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H}_\sigma & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & L_f(s) := \int_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \end{array} \right\}.$$

Aufgabe 62 (LAPLACE–Transformierte von Polynomen und der Sinusfunktion)

a) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die LAPLACE–Transformierte von

$$\mathrm{id}^n : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{id}^n(x) := x^n \end{array} \right\}!$$

b) Berechnen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ die LAPLACE–Transformierte von

$$h : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) := \sin(ax) \end{array} \right\}!$$

Aufgabe 63 (Ableitungen und Multiplikation von LAPLACE–Transformierten)

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ und alle $f \in \mathcal{L}(\sigma_0)$

$$L_f^{(n)} = L_{(-\mathrm{id})^n \cdot f},$$

wobei $\mathrm{id} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \mathrm{id}(s) := s \end{array} \right\}$ die Identität ist!

b) Für alle $f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\}$ mit $\int\limits_0^x |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$ für alle $x \in \mathcal{D}$ und alle $g : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & g(x) \end{array} \right\}$ mit $\int\limits_0^x |g(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$ für alle $x \in \mathcal{D}$ definiert man

$$f \star g : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (f \star g)(x) := \int\limits_0^x f(y) \cdot g(x-y) \, \mathrm{d}y \end{array} \right\}.$$

Zeigen Sie für alle $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, alle $f \in \mathcal{L}(\sigma_0)$ und alle $g \in \mathcal{L}(\sigma_0)$

$$L_{f \star g} = L_f \cdot L_g \quad !$$