Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

6. Übungsblatt — Musterlösung

25. November 2009

Aufgabe 61 (Beweis für $\zeta(1+\mathrm{i}t) \neq 0$ nach INGHAM (1930))
Für alle $z \in \mathbb{C}$ sei $P_z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & P_z(n) := n^z \end{array} \right\}$.

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von LANDAU aus Aufgabe 58, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ absolut konvergiert, falls $t \in \mathbb{R}$ mit $\zeta(1+\mathrm{i}t) = 0$ ist!

b) Zeigen Sie
$$|\zeta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2 \geq \zeta(2\sigma) \qquad \text{für alle } \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } \sigma > \tfrac{1}{2},$$
falls $t \in \mathbb{R}$ mit $\zeta(1+\mathrm{i}t) = 0$ ist, und folgern Sie die Nullstellenfreiheit von ζ auf $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) = 1\}$!

Tipp: Verwenden Sie $|(P_z * \mathbb{1})(n)|^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und alle $z \in \mathbb{C}$!

Lösung:

a) <u>Annahme:</u> Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\zeta(1+\mathrm{i}t) = 0$.

Sei $\bar{\cdot} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} := \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}(z) \end{array} \right\}$.

Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt
$$\overline{\zeta(s)} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\bar{s}}} = \zeta(\bar{s}).$$

Mit der Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung folgt also
$$\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s}) \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

Insbesondere ist
$$\zeta(1-\mathrm{i}t) = \zeta\left(\overline{1+\mathrm{i}t}\right) = \overline{\zeta(1+\mathrm{i}t)} = \bar{0} = 0.$$

Nach der Formel von RAMANUJAN aus Aufgabe 60 b) gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d^{\mathrm{i}t} \right) \cdot \left(\sum_{d|n} d^{-\mathrm{i}t} \right) \cdot \frac{1}{n^s} \\
&= \frac{\zeta(s) \cdot \zeta(s-\mathrm{i}t) \cdot \zeta(s-(-\mathrm{i}t)) \cdot \zeta(s-\mathrm{i}t-(-\mathrm{i}t))}{\zeta(2s-\mathrm{i}t-(-\mathrm{i}t))} \\
&= \frac{\zeta^2(s) \cdot \zeta(s-\mathrm{i}t) \cdot \zeta(s+\mathrm{i}t)}{\zeta(2s)}.
\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ ein maximales Gebiet, so dass

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & f(s) := \dfrac{\zeta^2(s) \cdot \zeta(s - \mathrm{i}t) \cdot \zeta(s + \mathrm{i}t)}{\zeta(2s)} \end{array} \right\}$$

holomorph auf $\mathcal{D}$ ist. Klar ist

$$\left(\left\{ s \in \mathbb{C} \middle| \operatorname{Re}(s) > \tfrac{1}{2} \right\} \setminus \{1; 1 + \mathrm{i}t; 1 - \mathrm{i}t\} \right) \subseteq \mathcal{D},$$

da alle Faktoren des Zählers von f und auch der Nenner von f dort holomorph sind.

Wegen $\zeta(1 + \mathrm{i}t) = 0$ wird der Pol bei $1 + \mathrm{i}t$ (der Ordnung 1) des zweiten Faktors im Zähler von f vom ersten Faktor egalisiert. Deshalb ist $1 + \mathrm{i}t \in \mathcal{D}$.

Wegen $\zeta(1 - \mathrm{i}t) = 0$ wird der Pol bei $1 - \mathrm{i}t$ (der Ordnung 1) des dritten Faktors im Zähler von f vom ersten Faktor egalisiert. Deshalb ist $1 - \mathrm{i}t \in \mathcal{D}$.

Wegen $\zeta(1 - \mathrm{i}t) = 0$ und $\zeta(1 + \mathrm{i}t) = 0$ wird der Pol bei 1 (der Ordnung 2) des ersten Faktors im Zähler von f vom zweiten und dritten Faktor egalisiert. Deshalb ist $1 \in \mathcal{D}$.

Insgesamt folgt

$$\left\{ s \in \mathbb{C} \middle| \operatorname{Re}(s) > \tfrac{1}{2} \right\} \subseteq \mathcal{D}.$$

f ist die holomorphe Fortsetzung der Dirichlet–Reihe zu $|P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1}|^2$.

Wegen $|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit dem Satz von Landau aus Aufgabe 58, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ konvergiert, da der Schnittpunkt der Konvergenzabszisse mit der realen Achse kein Element von $\mathcal{D}$ ist.

Wieder wegen $|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die absolute Konvergenz von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

b) Es gilt

$$|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(1)|^2 = \left| \sum_{d|1} d^{\mathrm{i}t} \right|^2 = \left|1^{\mathrm{i}t}\right|^2 = |1|^2 = 1.$$

Wegen $|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2}{n^\sigma} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2}{n^\sigma} \geq 1.$$

Wegen der Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung gilt für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(P_{\mathrm{i}t} * \mathbb{1})(n)|^2}{n^\sigma} = f(\sigma) &= \frac{\zeta^2(\sigma) \cdot \zeta(\sigma - \mathrm{i}t) \cdot \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)}{\zeta(2\sigma)} \\ &= \frac{\zeta(\sigma) \cdot \zeta(\bar{\sigma}) \cdot \zeta\left(\overline{\sigma + \mathrm{i}t}\right) \cdot \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)}{\zeta(2\sigma)} = \frac{|\zeta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2}{\zeta(2\sigma)}. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > \frac{1}{2}$

$$1 \leq \frac{|\zeta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2}{\zeta(2\sigma)} \qquad \text{bzw.} \qquad |\zeta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma + \mathrm{i}t)|^2 \geq \zeta(2\sigma).$$

Im Grenzwert $\sigma \to \frac{1}{2}^+$ geht die linke Seite gegen den reellen Wert $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \zeta\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\right)\right|^2$, während die rechte Seite gegen ∞ divergiert. Dies bedeutet einen Widerspruch.

Laplace–Transformation

Sei $\mathcal{D} := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ sei $\mathbb{H}_\sigma := \{\, s \in \mathbb{R} |\, \mathrm{Re}\,(s) > \sigma \}$.

Für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ und alle $T \in \mathcal{D}$ heißt $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f\,(x) \end{array} \right\}$ **von der exponentiellen Ordnung $\boldsymbol{\sigma}$ ab $\boldsymbol{T}$**, falls es ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f\,(t)| \le C\mathrm{e}^{\sigma t} \qquad \text{für alle } t \in \mathcal{D} \text{ mit } t \ge T$$

gibt.

Sind $\sigma \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{D}$ und $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f\,(x) \end{array} \right\}$ von der exponentiellen Ordnung σ ab T derart, dass $\int\limits_0^T |f\,(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$ ist, so konvergiert $\int\limits_0^\infty f\,(t) \cdot \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t$ für alle $s \in \mathbb{H}_\sigma$ absulot.

Für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{L}\,(\sigma) := \left\{ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f\,(x) \end{array} \right\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } T \in \mathcal{D}, \text{ so dass } f \text{ von der exponentiellen} \\ \text{Ordnung } \sigma \text{ ab } T \text{ ist und } \int\limits_0^T |f\,(t)|\, \mathrm{d}t < \infty \text{ gilt} \end{array} \right\}.$$

Für ein $\sigma \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f\,(x) \end{array} \right\} \in \mathcal{L}\,(\sigma)$ wird die **Laplace–Transformierte $\boldsymbol{L_f}$ von $\boldsymbol{f}$** definiert durch

$$L_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H}_\sigma & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & L_f\,(s) := \int\limits_0^\infty f\,(t) \cdot \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t \end{array} \right\}.$$

Aufgabe 62 (Laplace–Transformierte von Polynomen und der Sinusfunktion)

a) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Laplace–Transformierte von

$$\mathrm{id}^n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{id}^n\,(x) := x^n \end{array} \right\}!$$

b) Berechnen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ die Laplace–Transformierte von

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h\,(x) := \sin\,(ax) \end{array} \right\}!$$

Lösung:

a) Induktionsanfang:

Für alle $s \in \mathbb{H}_0$ gilt

$$L_{\mathrm{id}^0}\,(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} \right]_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{0}{s} + \frac{1}{s} = \frac{0!}{s^{0+1}}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $L_{\mathrm{id}^{n-1}}(s) = \dfrac{(n-1)!}{s^{(n-1)+1}}$ für alle $s \in \mathbb{H}_0$.

Induktionsschluss:

Für alle $s \in \mathbb{H}_0$ gilt

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{id}^n}(s) &= \int_0^\infty t^n \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[t^n \cdot \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty n t^{n-1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{s} \cdot \int_0^\infty t^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{s} \cdot L_{\mathrm{id}^{n-1}}(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{(n-1)!}{s^{(n-1)+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für alle $s \in \mathbb{H}_0$ gilt

$$\begin{aligned} L_h(s) &= \int_0^\infty \sin(at) \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \left[\sin(at) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty \cos(at) \cdot a \cdot \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a}{s} \cdot \int_0^\infty \cos(at) \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{s} \cdot \left[\cos(at) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t=\infty} - \frac{a}{s} \cdot \int_0^\infty (-\sin(at) \cdot a) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a}{s} \cdot \frac{1}{s} - \frac{a^2}{s^2} \cdot \int_0^\infty \sin(at) \cdot \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{s^2} - \frac{a^2}{s^2} \cdot L_h(s). \end{aligned}$$

Damit folgt für alle $s \in \mathbb{H}_0$

$$\frac{s^2 + a^2}{s^2} \cdot L_h(s) = \frac{a}{s^2} \qquad \text{bzw.} \qquad L_h(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Aufgabe 63 (Ableitungen und Multiplikation von LAPLACE–Transformierten)

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ und alle $f \in \mathcal{L}(\sigma_0)$

$$L_f^{(n)} = L_{(-\mathrm{id})^n \cdot f},$$

wobei $\mathrm{id} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \mathrm{id}(s) := s \end{array} \right\}$ die Identität ist.

b) Für alle $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\}$ mit $\displaystyle\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ für alle $x \in \mathcal{D}$ und alle $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & g(x) \end{array} \right\}$ mit $\displaystyle\int_0^x |g(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ für alle $x \in \mathcal{D}$ definiert man

$$f \star g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (f \star g)(x) := \displaystyle\int_0^x f(y) \cdot g(x-y)\,\mathrm{d}y \end{array} \right\}.$$

Zeigen Sie für alle $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, alle $f \in \mathcal{L}(\sigma_0)$ und alle $g \in \mathcal{L}(\sigma_0)$

$$L_{f \star g} = L_f \cdot L_g \quad !$$

Lösung:

a) Seien $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\} \in \mathcal{L}(\sigma_0)$.

Wegen der absoluten Konvergenz von $\int\limits_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t$ für alle $s \in \mathbb{H}_{\sigma_0}$, darf die Integration mit einem Differentialoperator vertauscht werden.

Also ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s \in \mathbb{H}_{\sigma_0}$

$$L_f^{(n)}(s) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} \int\limits_0^\infty f(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty f(t) \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t.$$

Induktionsanfang: Es ist $\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}s^1}\mathrm{e}^{-st} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-st} = -t \cdot \mathrm{e}^{-st} = (-t)^1 \cdot \mathrm{e}^{-st}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\mathrm{e}^{-st} = (-t)^k \cdot \mathrm{e}^{-st}$.

Induktionsschluss: Dann gilt $\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}s^{k+1}}\mathrm{e}^{-st} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\mathrm{e}^{-st}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((-t)^k \cdot \mathrm{e}^{-st}\right) = (-t)^{k+1} \cdot \mathrm{e}^{-st}$.

Damit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s \in \mathbb{H}_{\sigma_0}$

$$L_f^{(n)}(s) = \int\limits_0^\infty f(t) \cdot (-t)^n \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \left((-\,\mathrm{id})^n \cdot f\right)(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t = L_{(-\,\mathrm{id})^n \cdot f}(s).$$

b) Seien $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right\} \in \mathcal{L}(\sigma_0)$ und $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & g(x) \end{array} \right\} \in \mathcal{L}(\sigma_0)$.

Dann gilt für alle $s \in \mathbb{H}_{\sigma_0}$

$$\begin{aligned} L_{f \star g}(s) &= \int\limits_0^\infty (f \star g)(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t f(y) \cdot g(t-y) \, \mathrm{d}y \right) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_y^\infty f(y) \cdot g(t-y) \cdot \mathrm{e}^{-st} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^\infty f(y) \cdot \left(\int\limits_y^\infty g(t-y) \cdot \mathrm{e}^{-s \cdot (t-y)} \, \mathrm{d}t \right) \cdot \mathrm{e}^{-sy} \, \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^\infty f(y) \cdot \mathrm{e}^{-sy} \cdot \left(\int\limits_0^\infty g(x) \cdot \mathrm{e}^{-sx} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= L_g(s) \cdot \int\limits_0^\infty f(y) \cdot \mathrm{e}^{-sy} \, \mathrm{d}y \\ &= L_g(s) \cdot L_f(s) \\ &= (L_f \cdot L_g)(s). \end{aligned}$$