

Aufgabe 67 (Die Größenordnung von $\psi - \text{id}$ und ζ -Nullstellen)

Zeigen Sie

$$\{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \zeta(\varrho) = 0\} \subseteq \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) \leq \alpha\}$$

für alle $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$ mit

$$\psi(x) - x = O(x^\alpha)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$!

Tipp: Untersuchen Sie die analytische Fortsetzbarkeit von $\frac{\zeta'}{\zeta}$ mit Hilfe von Aufgabe 52!

Aufgabe 68 (ζ -Nullstellen und die Größenordnung von $\psi - \text{id}$)

Für alle $T \in \mathbb{R}$ mit $T \geq 1$ gilt

$$\#\{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \zeta(\varrho) = 0 \text{ und } T < |\text{Im}(\varrho)| \leq T + 1\} = O(\ln(T + 4)).$$

Außerdem ist $\#\{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \zeta(\varrho) = 0 \text{ und } |\text{Im}(\varrho)| \leq 1\}$ eine absolute Konstante.

Zeigen Sie

$$\psi(x) - x = O(x^\alpha \cdot \ln^2(x))$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ und alle $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$ mit

$$\{\varrho \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \zeta(\varrho) = 0\} \subseteq \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) \leq \alpha\} \quad !$$

Tipp: Verwenden Sie die explizite Formel!

Aufgabe 69 (Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{2}$)

- a) Leiten Sie auf der Annahme der Rationalität von $\sqrt{2}$ her, dass es ein $q \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $q \cdot (\sqrt{2} - 1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl ist und geben Sie an, wie hieraus ein Widerspruch entsteht!
- b) Lässt sich die Beweisführung auf $\sqrt[k]{m}$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{n^k \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ verallgemeinern? Wenn ja, wie?