Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

9. Übungsblatt

16. Dezember 2009

Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Die Menge $\{\,tw + (1-t)\cdot z \in \mathbb{C} |\, t \in \mathbb{R}\}$ heißt „Gerade in $\mathbb{C}$ durch $w \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{w\}$" und die Menge $\{\,z \in \mathbb{C} |\, |z-w| = r\}$ heißt „Kreis in $\mathbb{C}$ um $w \in \mathbb{C}$ mit dem Radius $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$".
Ist $\mathcal{G}$ eine Menge von Geraden in $\mathbb{C}$ und $\mathcal{K}$ eine Menge von Kreisen in $\mathbb{C}$, so sei $f\,(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ die Menge der Zahlen in $\mathbb{C}$, die durch

- den Schnittpunkt zweier Geraden aus $\mathcal{G}$,
- einen Schnittpunkt zweier Kreise aus $\mathcal{K}$ oder
- einen Schnittpunkt einer Geraden aus $\mathcal{G}$ und eines Kreis aus $\mathcal{K}$

definiert sind.
Außerdem wird mit $\sphericalangle\,(g, h)$ für $g \in \mathcal{G}$ und $h \in \mathcal{G}$ der kleinste nicht–negative Winkel bezeichnet, um den g mathematisch positiv gedreht werden muss, um parallel zu h zu sein.

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$. Seien $\mathcal{G}_{\mathcal{M},0}$ die Menge aller Geraden, die durch zwei Punkte aus $\mathcal{M}$ laufen und $\mathcal{K}_{\mathcal{M},0}$ die Menge aller Kreise um einen Punkt aus $\mathcal{M}$ mit einem Radius, der der Länge des Abstands eines Punktes aus $\mathcal{M}$ zum Mittelpunkt des Kreises entspricht.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien nun $\mathcal{M}_n := f\,(\mathcal{G}_{\mathcal{M},n-1}, \mathcal{K}_{\mathcal{M},n-1})$, $\mathcal{G}_{\mathcal{M},n}$ die Menge aller Geraden, die durch zwei Punkte aus $\mathcal{M}_n$ laufen und $\mathcal{K}_{\mathcal{M},n}$ die Menge aller Kreise um einen Punkt aus $\mathcal{M}_n$ mit einem Radius, der der Länge des Abstands eines Punktes aus $\mathcal{M}_n$ zum Mittelpunkt des Kreises entspricht.
Seien $\mathbb{A}_{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$, $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}} := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_{\mathcal{M},n}$ und $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}} := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_{\mathcal{M},n}$.
$\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ heißt **Menge der aus $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ konstruierbaren Zahlen**.

Aufgabe 67 (Fliegender Zirkel und Parallelen)
Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass es ein $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und ein $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{w\}$ gibt.

a) Zeigen Sie, dass für $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{w\}$ auch die dritte Spitze eines gleichseitigen Dreiecks, dessen eine Seite die Strecke von w nach z ist, in $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ liegt!

b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabenteil a), dass für $s \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$, $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ der Kreis um s mit dem Radius $|w-z|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ liegt!

Tipp: Verwenden Sie ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken s und w !

c) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ auch die Senkrechte zu g durch z in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ liegt!

Folgern Sie hieraus, dass auch die Parallele zu g durch z in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ liegt!

bitte wenden

Aufgabe 68 ($\mathbb{A}_{\mathcal{M}} \cap \mathbb{R}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$)

a) Zeigen Sie, dass mit $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ auch $-w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $w + z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ sind, wenn $0 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ sind!

b) Zeigen Sie, dass für $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$, $g_1 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$, $h_1 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$, $g_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und $h_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ ein $k_1 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$, ein $k_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und ein $k_3 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ mit

$$\sphericalangle(g_1, k_1) = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle(g_1, h_1), \qquad \sphericalangle(g_1, k_2) = \pi - \sphericalangle(g_1, h_1) \quad (\text{falls } \sphericalangle(g_1, h_1) \neq 0 \text{ ist})$$

$$\text{und } \sphericalangle(g_1, k_3) = \begin{cases} \sphericalangle(g_1, h_1) + \sphericalangle(g_2, h_2), & \text{falls } \sphericalangle(g_1, h_1) + \sphericalangle(g_2, h_2) < \pi \text{ ist} \\ \sphericalangle(g_1, h_1) + \sphericalangle(g_2, h_2) - \pi, & \text{falls } \sphericalangle(g_1, h_1) + \sphericalangle(g_2, h_2) \geq \pi \text{ ist} \end{cases}$$

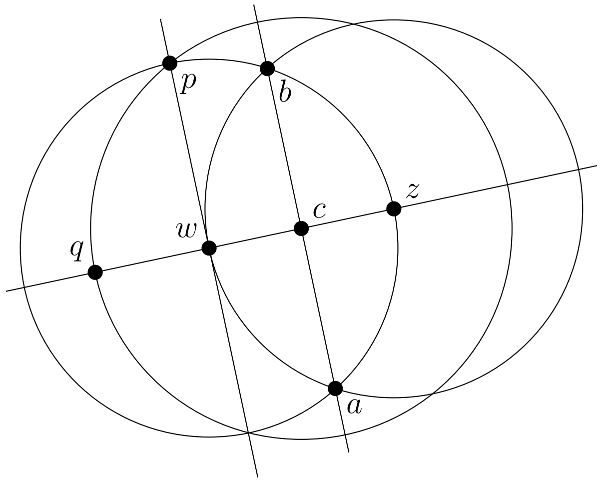
existieren, wenn es ein $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und ein $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{w\}$ gibt!

Bemerkung: Das heißt, Winkel können halbiert, gespiegelt und addiert werden.

c) Zeigen Sie für $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dass $xy \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $\frac{1}{z} \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ sind, wenn $\{0; 1; x; y; z\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ gilt!

Aufgabe 69 (Konstruktion der Wurzel einer nicht–negativen reellen Zahl)
Seien $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ mit $0 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $1 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.
Zeigen Sie, dass $\sqrt{x} \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ ist, wenn $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \cap \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ ist!

Zusatzaufgabe (Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks)
Seien $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}} \neq \emptyset$ ist, und $(w, z)^T \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}^2$ mit $w \neq z$.
Zeigen Sie, dass $|p - q|$ mit p und q wie folgt die Seitenlänge eines regelmäßigen Fünfecks mit Umkreisradius $|w - z|$ ist!



Die Gerade durch w und z ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.
Der Kreis um w mit Radius $|w - z|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.
Die Senkrechte durch w auf die Gerade durch w und z ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Sei $p \in \mathbb{C}$ der Schnittpunkt der Senkrechten mit dem Kreis.
Der Kreis um z mit Radius $|z - w|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet den Kreis um w mit Radius $|w - z|$ in den Punkten $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
Deshalb ist die Gerade durch a und b in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet die Gerade durch w und z in $c \in \mathbb{C}$.
Der Kreis um c mit dem Radius $|p - c|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.
Sei $q \in \mathbb{C}$ der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden durch w und z.

Tipp: Um die Länge der Seite eines regelmäßigen Fünfecks in Abhängigkeit des Umkreisradius' des Fünfecks zu berechnen, betrachtet man die Gleichung $0 = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} + 1 + \zeta + \zeta^2$, in der $\zeta \in \mathbb{C}$ eine fünfte Einheitswurzel ist. Damit kann man $2\,\mathrm{Re}(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta}$ bestimmen. $\mathrm{Re}(\zeta)$ ist der Kosinuswert des Schnittwinkels zweier Winkelhalbierenden des Fünfecks. Mit

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} \\ &= 2 \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sqrt{1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} \end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ kann man dann die Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks bestimmen.