Albert–Ludwigs–Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Abteilung für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Dipl.–Math. S. Feiler

Übungen zur Vorlesung

Ergänzungen zur Elementaren Zahlentheorie

Wintersemester 2009/2010

9. Übungsblatt — Musterlösung

16. Dezember 2009

Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Die Menge $\{tw + (1-t) \cdot z \in \mathbb{C} | \, t \in \mathbb{R}\}$ heißt „Gerade in $\mathbb{C}$ durch $w \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{w\}$“ und die Menge $\{z \in \mathbb{C} | \, |z - w| = r\}$ heißt „Kreis in $\mathbb{C}$ um $w \in \mathbb{C}$ mit dem Radius $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$“.
Ist $\mathcal{G}$ eine Menge von Geraden in $\mathbb{C}$ und $\mathcal{K}$ eine Menge von Kreisen in $\mathbb{C}$, so sei $f(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ die Menge der Zahlen in $\mathbb{C}$, die durch

- den Schnittpunkt zweier Geraden aus $\mathcal{G}$,
- einen Schnittpunkt zweier Kreise aus $\mathcal{K}$ oder
- einen Schnittpunkt einer Geraden aus $\mathcal{G}$ und eines Kreis aus $\mathcal{K}$

definiert sind.
Außerdem wird mit $\sphericalangle(g, h)$ für $g \in \mathcal{G}$ und $h \in \mathcal{G}$ der kleinste nicht–negative Winkel bezeichnet, um den g mathematisch positiv gedreht werden muss, um parallel zu h zu sein.

Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$. Seien $\mathcal{G}_{\mathcal{M},0}$ die Menge aller Geraden, die durch zwei Punkte aus $\mathcal{M}$ laufen und $\mathcal{K}_{\mathcal{M},0}$ die Menge aller Kreise um einen Punkt aus $\mathcal{M}$ mit einem Radius, der der Länge des Abstands eines Punktes aus $\mathcal{M}$ zum Mittelpunkt des Kreises entspricht.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien nun $\mathcal{M}_n := f(\mathcal{G}_{\mathcal{M},n-1}, \mathcal{K}_{\mathcal{M},n-1})$, $\mathcal{G}_{\mathcal{M},n}$ die Menge aller Geraden, die durch zwei Punkte aus $\mathcal{M}_n$ laufen und $\mathcal{K}_{\mathcal{M},n}$ die Menge aller Kreise um einen Punkt aus $\mathcal{M}_n$ mit einem Radius, der der Länge des Abstands eines Punktes aus $\mathcal{M}_n$ zum Mittelpunkt des Kreises entspricht.
Seien $\mathbb{A}_{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$, $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_{\mathcal{M},n}$ und $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_{\mathcal{M},n}$.
$\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ heißt **Menge der aus $\mathcal{M}$ konstruierbaren Zahlen**.

Aufgabe 67 (Fliegender Zirkel und Parallelen)
Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass es ein $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und ein $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{w\}$ gibt.

a) Zeigen Sie, dass für $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{w\}$ auch die dritte Spitze eines gleichseitigen Dreiecks, dessen eine Seite die Strecke von w nach z ist, in $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ liegt!

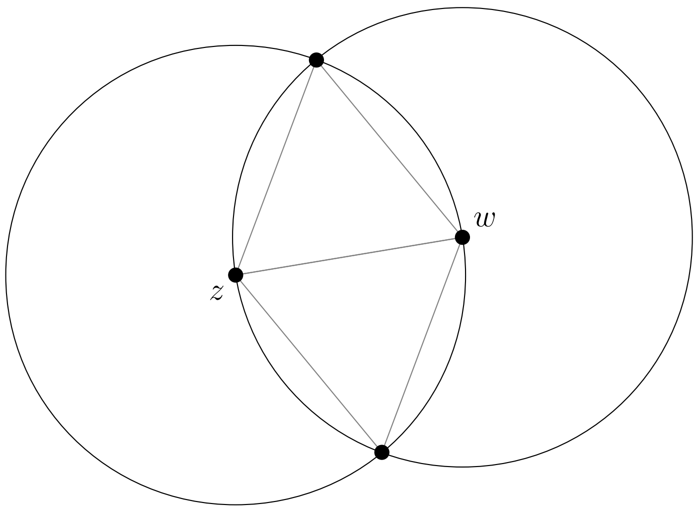
b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabenteil a), dass für $s \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$, $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ der Kreis um s mit dem Radius $|w - z|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ liegt!

Tipp: Verwenden Sie ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken s und w !

c) Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ auch die Senkrechte zu g durch z in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ liegt!
Folgern Sie hieraus, dass auch die Parallele zu g durch z in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ liegt!

Lösung:

a) Seien $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{w\}$.

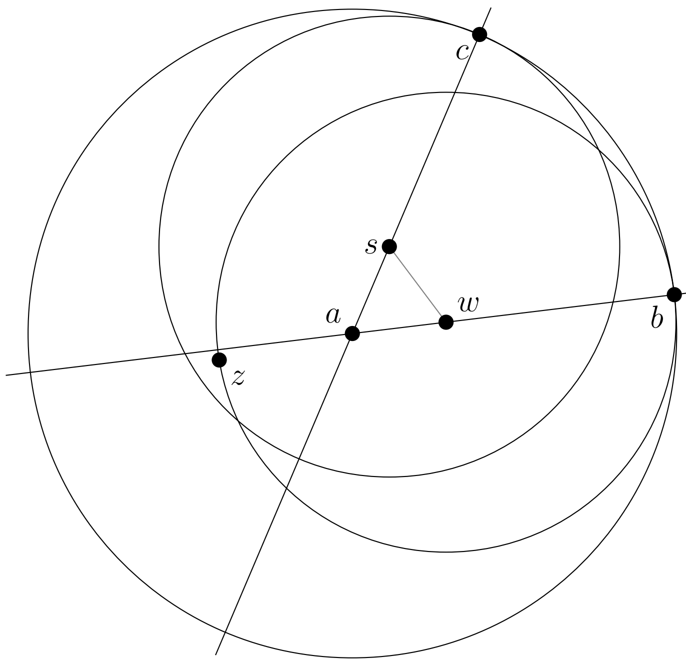


Der Kreis um w mit Radius $|w - z|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Außerdem ist der Kreis um z mit Radius $|z - w|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind die gesuchten Spitzen der gleichseitigen Dreiecke.

b) Seien $s \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$, $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.

Ist $w = z$, so ist $|w - z| = 0$ und der Kreis vom Radius 0 um s liegt in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.
Ist $s \in \{w, z\}$, so ist der Kreis um s mit Radius $|w - z|$ trivialerweise in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.

Seien nun also $w \neq z$ und $w \neq s \neq z$ vorausgesetzt.



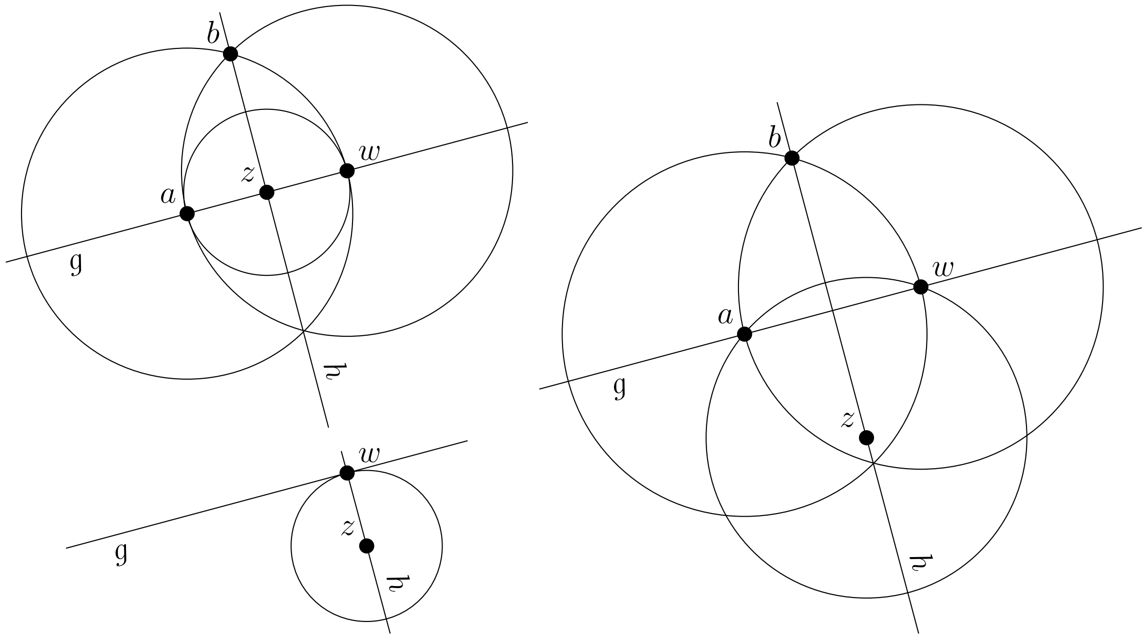
Nach Aufgabenteil a) ist die Spitze $a \in \mathbb{C}$ eines gleichseitigen Dreiecks mit den Ecken w und s in $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.
Der Kreis um w mit Radius $|w - z|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Die Gerade durch a und w ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Der weiter von a entfernte Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden $b \in \mathbb{C}$ ist damit in $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.
Der Kreis um a mit Radius $|a - b|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und die Gerade durch a und s ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Damit ist deren näher bei s gelegener Schnittpunkt $c \in \mathbb{C}$ ist in $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.
Zuguterletzt ist der Kreis um s mit dem Radius $|s - c|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.

Wegen

$$\begin{aligned}
|s - c| &= |s - c| + |s - a| - |w - a| \\
&= |a - c| - |w - a| \\
&= |a - b| - |w - a| \\
&= |w - b| \\
&= |w - z|
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

c) Seien $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.



Es gibt ein $w \in (g \cap \mathbb{A}_{\mathcal{M}}) \setminus \{z\}$, da $g \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und damit eine Gerade durch zwei Punkte aus $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ ist.
Der Kreis um z mit dem Radius $|z - w|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet g. Gibt es nur einen Schnittpunkt, so ist das w und die Gerade durch w und z steht senkrecht auf g, da g eine Tangente an den Kreis ist.
Gibt es zwei Schnittpunkte, so sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{w\}$ der zweite Schnittpunkt.
Die Kreise um a und w mit den Radien $|a - w|$ liegen in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneiden sich in $b \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$.
Die Gerade h durch z und b ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und steht senkrecht auf g.

Will man die Parallele zu g durch z konstruieren, so muss man lediglich die Senkrechte zu h durch z genau wie im angegebenen Verfahren konstruieren.

Aufgabe 68 ($\mathbb{A}_{\mathcal{M}} \cap \mathbb{R}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$)

a) Zeigen Sie, dass mit $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ auch $-w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $w + z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ sind, wenn $0 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ sind!

b) Zeigen Sie, dass für $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$, $g_1 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$, $h_1 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$, $g_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und $h_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ ein $k_1 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$, ein $k_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und ein $k_3 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ mit

$$\sphericalangle(g_1, k_1) = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle(g_1, h_1), \qquad \sphericalangle(g_1, k_2) = \pi - \sphericalangle(g_1, h_1) \quad \text{(falls } \sphericalangle(g_1, h_1) \neq 0 \text{ ist)}$$

$$\text{und } \sphericalangle(g_1, k_3) = \begin{cases} \sphericalangle(g_1, h_1) + \sphericalangle(g_2, h_2), & \text{falls } \sphericalangle(g_1, h_1) + \sphericalangle(g_2, h_2) < \pi \text{ ist} \\ \sphericalangle(g_1, h_1) + \sphericalangle(g_2, h_2) - \pi, & \text{falls } \sphericalangle(g_1, h_1) + \sphericalangle(g_2, h_2) \geq \pi \text{ ist} \end{cases}$$

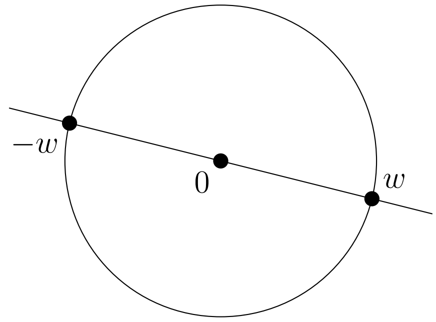
existieren, wenn es ein $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und ein $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{w\}$ gibt!

Bemerkung: Das heißt, Winkel können halbiert, gespiegelt und addiert werden.

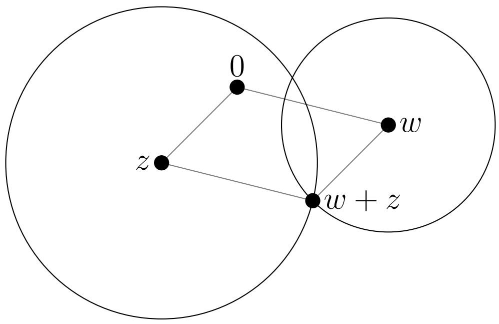
c) Zeigen Sie für $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dass $xy \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $\frac{1}{z} \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ sind, wenn $\{0; 1; x; y; z\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ gilt!

Lösung:

a) Seien $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $z \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.



Wegen $0 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ ist die Gerade durch 0 und w in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Außerdem ist der Kreis um 0 mit Radius $|w - 0|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Die Schnittpunkte von Gerade und Kreis sind gerade w und $-w$.

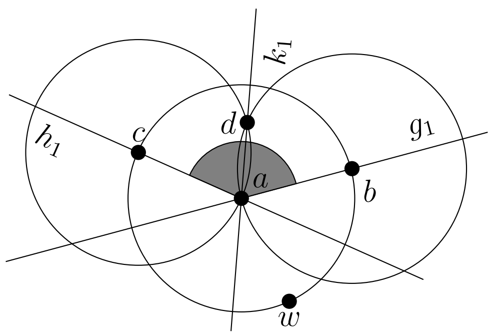


Wegen $0 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und Aufgabe 67 b) ist der Kreis um w mit Radius $|z - 0|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Außerdem ist der Kreis um z mit Radius $|w - 0|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Ein Schnittpunkt der beiden Kreise ist gerade $w + z$.

b) Seien $g_1 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$, $h_1 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$, $g_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und $h_2 \in \mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.

Halbieren:

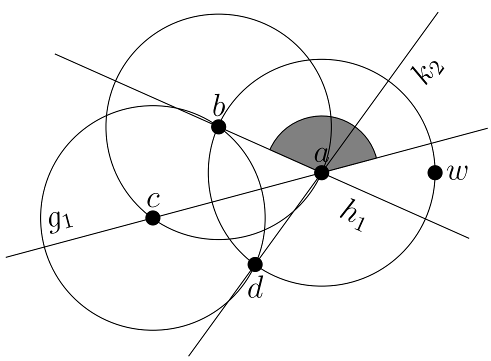
Ist g_1 parallel zu h_1, so sei k_1 die Senkrechte auf g_1 durch einen der g_1 definierenden Punkte. Nach Aufgabe 67 c) liegt diese in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. g_1 schneide nun also h_1.



Sei $a \in \mathbb{C}$ der Schnittpunkt von g_1 und h_1.
Es gibt ein $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{a\}$ und der Kreis um a mit Radius $|a - w|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Ein Schnittpunkt des Kreises mit g_1 sei b, der b in mathematisch positiver Richtung näherliegende Schnittpunkt des Kreises mit h_1 sei c.
Die Kreise um b mit Radius $|b - a|$ und um c mit Radius $|c - a|$ sind in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneiden sich in a und in $d \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
Sei k_1 die Gerade durch a und d.

Spiegeln:

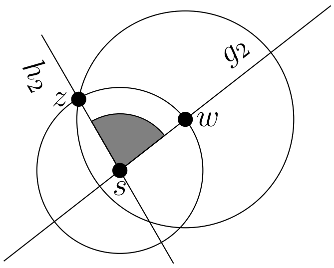
Sei nun g_1 nicht parallel zu h_1.

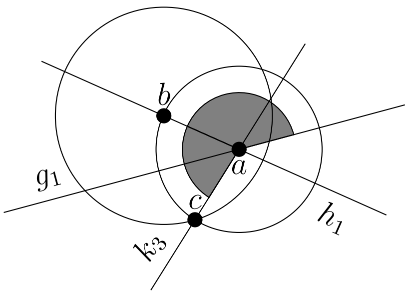


Sei $a \in \mathbb{C}$ der Schnittpunkt von g_1 und h_1.
Es gibt ein $w \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \setminus \{a\}$ und der Kreis um a mit Radius $|a - w|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$.
Der Kreis und h_1 schneiden sich in $b \in \mathbb{C}$.
Der Kreis um b mit Radius $|b - a|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet g_1 in a und in $c \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
Der Kreis um c mit Radius $|c - b|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet den Kreis um a mit Radius $|a - b|$ in b und in $d \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$.
Sei k_2 die Gerade durch a und d.

Addieren:

Sind g_2 und h_2 parallel, so sei $k_3 := h_1$. Seien nun also g_2 und h_2 nicht parallel.





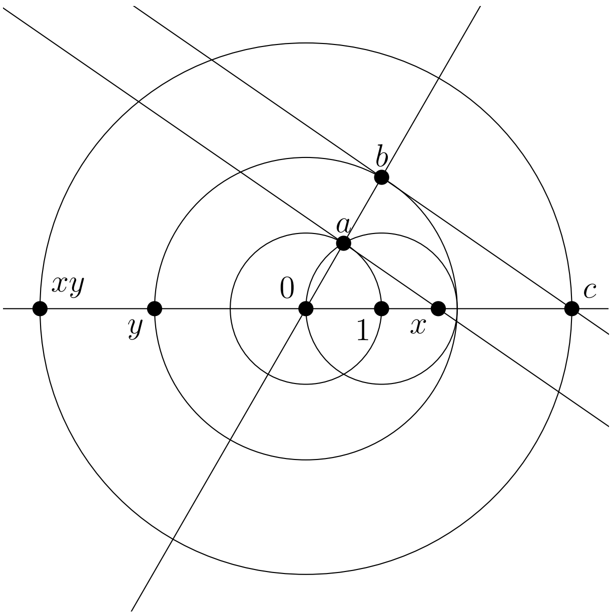
Sei $a \in \mathbb{C}$ ein Schnittpunkt von g_1 und h_1.
Sei $s \in \mathbb{C}$ der Schnittpunkt von g_2 und h_2.
Es gibt ein $w \in g_2 \cap \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ mit $w \neq s$, da g_2 eine Gerade durch zwei verschiedene Punkte aus $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ ist.
Der Kreis um s mit Radius $|s - w|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Sei $z \in \mathbb{C}$ derjenige Schnittpunkt dieses Kreises mit h_2, der in mathematisch positiver Richtung näher an w liegt.
Nach Aufgabenteil 67 b) ist der Kreis um a mit Radius $|s - w|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Er schneidet h_1 in $b \in \mathbb{C}$.
Nach Aufgabenteil 67 b) ist der Kreis um b mit Radius $|w - z|$ in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Sei $c \in \mathbb{C}$ derjenige Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreis um a mit Radius $|s - w|$, der in mathematisch positiver Richtung näher an b liegt.
Sei k_3 die Gerade durch a und c.

c) Seien $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gelte $\{0; 1; x; y; z\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.

Produkt:

Ist $\{x; y\} \cap \{0; 1\} \neq \emptyset$, so ist $xy \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ wegen $\{0; x; y\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.

Es gelte also $0 \neq x \neq 1$ und $0 \neq y \neq 1$.



Die Kreise um 0 und um 1 mit den Radien $|1 - 0|$ sind in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneiden sich in $a \in \mathbb{C}$.
Die Gerade durch 0 und a ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und der Kreis um 0 mit dem Radius $|y - 0|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Ein Schnittpunkt der beiden sei $b \in \mathbb{C}$.
Die Gerade durch a und x ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Nach Aufgabenteil 67 c) ist die Parallele durch b zur Geraden durch a und x ebenfalls in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Die Gerade durch 0 und 1 ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet diese Parallele in $c \in \mathbb{C}$.
Der Kreis um 0 mit Radius $|c - 0|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet die Gerade durch 0 und 1 in xy und $-xy$.

Beweis des letzten Satzes:

Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{|c - 0|}{|x - 0|} = \frac{|b - 0|}{|a - 0|}.$$

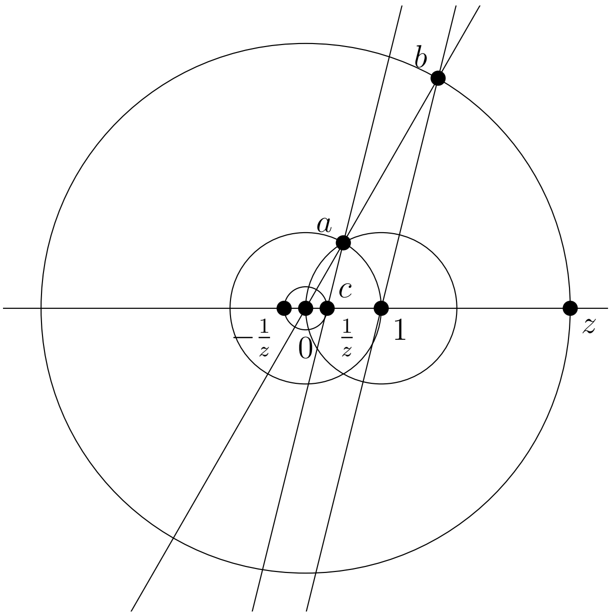
Nun sind $|x - 0| = |x|$, $|a - 0| = |1 - 0| = |1| = 1$ und $|b - 0| = |y - 0| = |y|$.

Das liefert

$$|c - 0| = |x - 0| \cdot \frac{|c - 0|}{|x - 0|} = |x| \cdot \frac{|b - 0|}{|a - 0|} = |x| \cdot \frac{|y|}{1} = |xy| = |xy - 0|\,.$$

Quotient:

Ist $z = 1$, so ist $\frac{1}{z} = 1 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$. Sei von nun an also $0 \neq z \neq 1$.



Die Kreise um 0 und um 1 mit den Radien $|1-0|$ sind in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneiden sich in $a \in \mathbb{C}$.
Die Gerade durch 0 und a ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und der Kreis um 0 mit dem Radius $|z-0|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Ein Schnittpunkt der beiden sei $b \in \mathbb{C}$.
Die Gerade durch b und 1 ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Nach Aufgabenteil 67 c) ist die Parallele durch a zur Geraden durch b und 1 ebenfalls in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$. Die Gerade durch 0 und 1 ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet diese Parallele in $c \in \mathbb{C}$.
Der Kreis um 0 mit Radius $|c-0|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_{\mathcal{M}}}$ und schneidet die Gerade durch 0 und 1 in $\frac{1}{z}$ und $-\frac{1}{z}$.

Beweis des letzten Satzes:

Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{|c-0|}{|1-0|} = \frac{|a-0|}{|b-0|}.$$

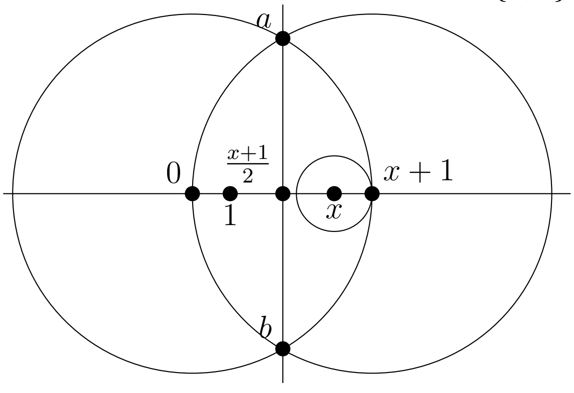
Nun sind $|a-0| = |1-0| = |1| = 1$ und $|b-0| = |z-0| = |z|$.

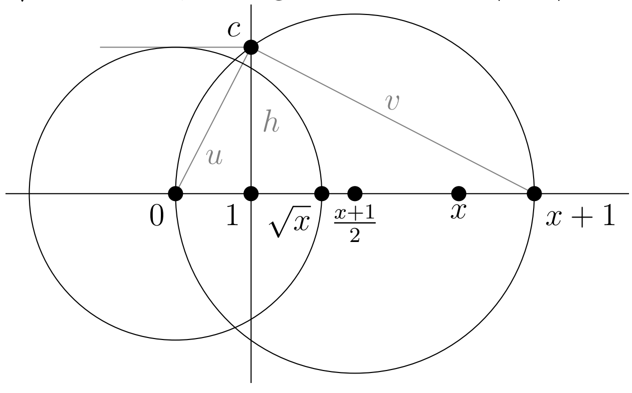
Das liefert

$$|c| = |c-0| = |1-0| \cdot \frac{|c-0|}{|1-0|} = 1 \cdot \frac{|a-0|}{|b-0|} = \frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z} - 0\right|.$$

Aufgabe 69 (Konstruktion der Wurzel einer nicht–negativen reellen Zahl)
Seien $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ mit $0 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $1 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$.
Zeigen Sie, dass $\sqrt{x} \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ ist, wenn $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \cap \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ ist!

Lösung:
Sei $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}} \cap \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$. Ist $x \in \{0; 1\}$, so ist $\sqrt{x} = x \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$. Es gelte nun also $0 \neq x \neq 1$.





Da $\mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ nach Aufgabe 68 ein Körper ist, sind wegen $1 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $x \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ auch $2 = 1+1 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$ und $x+1 \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$. Wiederum mit der Körpereigenschaft folgt $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{A}_{\mathcal{M}}$. (Die Konstruktion ist in halber Größe links nochmals dargestellt.)

Die Gerade durch 0 und 1 ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$.
Der Kreis um $\frac{x+1}{2}$ mit Radius $\left|\frac{x+1}{2} - 0\right|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$. Die Sekrechte durch 1 zur Geraden durch 0 und 1 ist nach Aufgabenteil 67 c) in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$. Die Senkrechte schneidet den Kreis in $c \in \mathbb{C}$.
Der Kreis um 0 mit dem Radius $|c-1|$ ist nach Aufgabenteil 67 b) in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$ und schneidet die Gerade durch 0 und 1 in $-\sqrt{x}$ und $\sqrt{x}$.

Beweis des letzten Satzes:
Seien $u := |c-0| = |c|$, $v := |x+1-c|$ und $h := |c-1|$.
Nach dem Satz des THALES' ist das Dreieck mit den Ecken 0, c und $x+1$ rechtwinklig.
Außerdem sind die Dreiecke mit den Ecken 0, 1 und c bzw. 1, $x+1$ und c rechtwinklig.
Nach dem Satz des PYTHAGORAS' folgen

$$|c-0|^2 + |x+1-c|^2 = |x+1-0|^2\,, \qquad |1-0|^2 + |c-1|^2 = |c-0|^2$$
$$\text{und} \qquad |c-1|^2 + |x+1-1|^2 = |x+1-c|^2\,.$$

Mit $|x+1-0| = |x+1| = x+1$, $|x+1-1| = |x| = x$ und $|1-0| = |1| = 1$ folgt also

$$u^2 + v^2 = (x+1)^2\,, \qquad 1^2 + h^2 = u^2 \qquad \text{und} \qquad h^2 + x^2 = v^2.$$

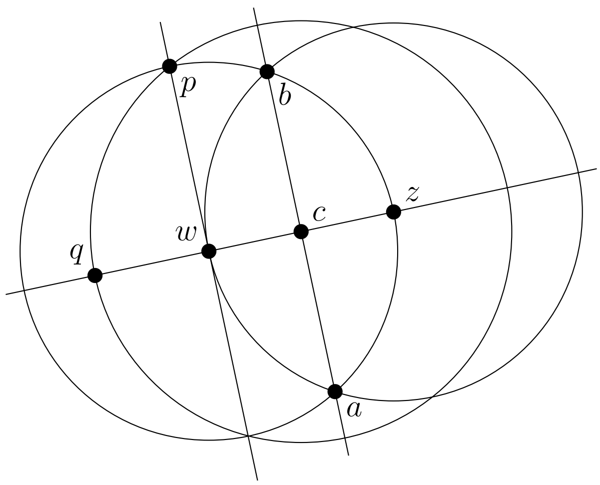
Setzt man die hinteren beiden Gleichungen in die erste Gleichung ein und multipliziert die Klammer aus, so erhält man

$$1^2 + h^2 + h^2 + x^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 2h^2 = 2x.$$

Damit folgt

$$\sqrt{x} = |h| = h = |c-1|\,.$$

Zusatzaufgabe (Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks)
Seien $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}} \neq \emptyset$ ist, und $(w,z)^T \in \mathbb{A}_\mathcal{M}^2$ mit $w \neq z$.
Zeigen Sie, dass $|p-q|$ mit p und q wie folgt die Seitenlänge eines regelmäßigen Fünfecks mit Umkreisradius $|w-z|$ ist!



Die Gerade durch w und z ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$.
Der Kreis um w mit Radius $|w-z|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$.
Die Senkrechte durch w auf die Gerade durch w und z ist in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$. Sei $p \in \mathbb{C}$ der Schnittpunkt der Senkrechten mit dem Kreis.
Der Kreis um z mit Radius $|z-w|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$ und schneidet den Kreis um w mit Radius $|w-z|$ in den Punkten $a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
Deshalb ist die Gerade durch a und b in $\mathcal{G}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$ und schneidet die Gerade durch w und z in $c \in \mathbb{C}$.
Der Kreis um c mit dem Radius $|p-c|$ ist in $\mathcal{K}_{\mathbb{A}_\mathcal{M}}$.
Sei $q \in \mathbb{C}$ der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden durch w und z.

Tipp: Um die Länge der Seite eines regelmäßigen Fünfecks in Abhängigkeit des Umkreisradius' des Fünfecks zu berechnen, betrachtet man die Gleichung $0 = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} + 1 + \zeta + \zeta^2$, in der $\zeta \in \mathbb{C}$ eine fünfte Einheitswurzel ist. Damit kann man $2\,\mathrm{Re}(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta}$ bestimmen.
$\mathrm{Re}(\zeta)$ ist der Kosinuswert des Schnittwinkels zweier Winkelhalbierenden des Fünfecks.
Mit

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} \\ &= 2 \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sqrt{1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} \end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ kann man dann die Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks bestimmen.

Lösung:
Für $\zeta := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{5}}$ ist $\zeta^5 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ und es folgt

$$\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} + 1 + \zeta + \zeta^2 = \frac{1}{\zeta^2} \cdot \sum_{j=0}^{4} \zeta^j = \frac{1}{\zeta^2} \cdot \frac{1-\zeta^5}{1-\zeta} = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2 + \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - 1 = \zeta^2 + 2 \cdot \frac{\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} + \zeta + \frac{1}{\zeta} - 1 = \frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} + 1 + \zeta + \zeta^2 = 0.$$

Ferner ist wegen $\zeta \cdot \bar{\zeta} = |\zeta|^2 = 1$

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{\zeta^2+1}{\zeta} = \frac{\zeta^2 \cdot \bar{\zeta} + \bar{\zeta}}{\zeta \cdot \bar{\zeta}} = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1} = 2 \cdot \operatorname{Re}(\zeta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Zusammengesetzt folgt

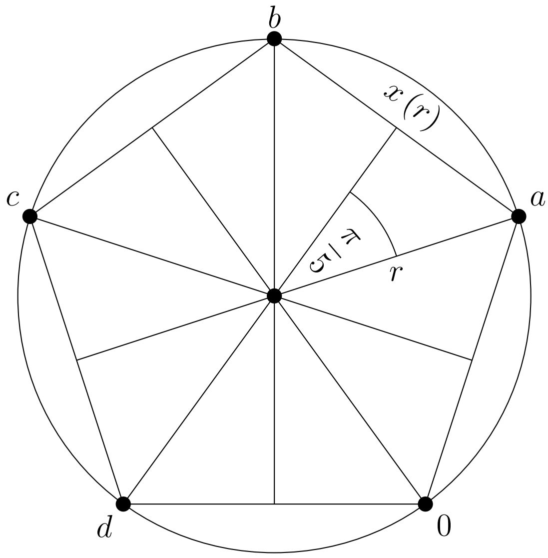
$$\begin{aligned}
&\left(2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot \left(2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right) \\
&= \left(2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \\
&= \left(2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 + \left(2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) - 1 = \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2 + \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wegen $0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ ist $2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$ und damit folgt

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{10}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \cdot \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)} \\
&= 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) \cdot \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right)} = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cdot \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} \\
&= 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16 - \left(5 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 1 + 1\right)}{16}} \\
&= \frac{\sqrt{5 - 2 \cdot \sqrt{5} + 1}}{2} \cdot \sqrt{\frac{10 + 2 \cdot \sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\left(3 - \sqrt{5}\right) \cdot \left(5 + \sqrt{5}\right)}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{15 - 5 \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.
\end{aligned}$$



Im nebenstehenden Bild wird klar, dass die Seitenlänge $x\left(r\right)$ eines regelmäßigen Fünfecks mit einem Umkreisradius von $r \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Bedingung genügt:

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\frac{x(r)}{2}}{r}.$$

Mit dem Vorhergehenden folgt

$$x\left(r\right) = r \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

In der Konstruktion ist

$$\begin{aligned} |p-w| &= |w-z|\,, \\ |c-w| &= \tfrac{1}{2}\cdot|w-z| \end{aligned}$$

wegen $|w-b| = |z-b|$ und weil die Gerade durch b und c senkrecht auf der Geraden durch w und z, auf der c liegt, steht,

$$|p-c|^2 = |p-w|^2 + |c-w|^2$$

nach dem Satz des PYTHAGORAS',

$$\begin{aligned} |q-c| &= |p-c|\,, \\ |q-w| &= |q-c| - |c-w| \end{aligned}$$

und wiederum nach dem Satz des PYTHAGORAS'

$$|p-q|^2 = |q-w|^2 + |p-w|^2\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |p-q| &= \sqrt{|q-w|^2 + |p-w|^2} = \sqrt{\left(|q-c| - |c-w|\right)^2 + |w-z|^2} \\ &= \sqrt{\left(|p-c| - \tfrac{1}{2}\cdot|w-z|\right)^2 + |w-z|^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{|p-w|^2 + |c-w|^2} - \tfrac{1}{2}\cdot|w-z|\right)^2 + |w-z|^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{|w-z|^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cdot|w-z|\right)^2} - \tfrac{1}{2}\cdot|w-z|\right)^2 + |w-z|^2} \\ &= |w-z|\cdot\sqrt{\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}\right)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Mit

$$\sqrt{\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot 1 + 1 + 4}{4}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

folgt die Behauptung.