Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 27.10.2005
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, den 03.11.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 1.
Sei $l, k \geq 2$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$R_{l,k}(n) \overset{\mathrm{Df}}{=} \#\{(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{N}_0^l,\ x_1^k + \ldots + x_l^k = n\}$$

(Anzahl der Darstellungen von n als Summe aus l k-ten Potenzen),

$$S(t) \overset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{\substack{0 \leq x \leq n^{1/k} \\ x \in \mathbb{N}_0}} e^{2\pi i x^k t}.$$

Dann gilt

$$R_{l,k}(n) = \int_0^1 (S(t))^l e^{-2\pi i n t} dt.$$

Aufgabe 2.
Für $k \geq 2$ sei

$$g(k) \overset{\mathrm{Df}}{=} min\{s \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\, \exists\, x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{N}_0 : n = x_1^k + \ldots + x_s^k\}.$$

(Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Waringsche Vermutung für k zutrifft.)

$$G(k) \overset{\mathrm{Df}}{=} min\{s \in \mathbb{N},\ \exists\, n_0\, \forall n \geq n_0\, \exists\, x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{N}_0 : n = x_1^k + \ldots + x_s^k\}.$$

(a) $\forall k : G(k) \leq g(k)$.

(b) $G(k) \geq k$.

(c) $g(k) \geq 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2$.
Hierzu untersuche man $n = 2^k \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 1$.

Aufgabe 3.
Nach Legendre ist ein $n \in \mathbb{N}$ genau dann Summe dreier Quadrate $\in \mathbb{N}_0$, wenn es nicht die Gestalt $4^a(8b+7)$ $(a, b \in \mathbb{N})$ hat. Zeigen Sie für $x \geq 2$

$$\begin{aligned} N_3(x) &\overset{\mathrm{Df}}{=} \#\{n \leq x,\ n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0)\} \\ &= \frac{5}{6}x + O(\ln x) \end{aligned}$$