Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 19.01.2006
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, den 26.01.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 29.

1) Die alten Ägypter (Papyrus Rhind = Rechenbuch des Ahmes, ca. 1900 vor ZR) stellten rationale Zahlen $\frac{a}{q} \in (0,1)$ als Summe verschiedener „Stammbrüche“ dar

$$\frac{a}{q} = \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k} \text{ mit } n_j \in \mathbb{N},\ 1 < n_1 < \cdots < n_k.$$

Der wohl erste Beweis für die Existenz solcher Darstellungen wurde von Leonardo von Pisa = Fibonacci (1180–1228) gegeben. Zu $0 < \frac{a}{q} < 1$, $\frac{a}{q} \neq \frac{1}{n}$ wähle man das kleinste n_1 mit $\frac{1}{n_1} < \frac{a}{q}$ und fahre fort mit $\frac{a}{q} - \frac{1}{n_1}$. Zeigen Sie, daß das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.

2) Behandeln Sie nach dieser Methode $\frac{a}{q} = \frac{5}{121}$.

Aufgabe 30.

Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge ganzer Zahlen

$$\alpha_g \in \mathbb{C} \text{ für } g \in \mathcal{A}, S(t) = \sum_{g \in \mathcal{A}} \alpha_g\, e(tg)$$

$$k \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{Z},\ A(k,b) \underset{\text{Df}}{=} \sum_{g \in \mathcal{A}, g \equiv b(k)} \alpha_g,\ A \underset{\text{Df}}{=} \sum_{g \in \mathcal{A}} \alpha_g.$$

1) Für jede Primzahl p gilt

$$p \sum_{b=0}^{p-1} \Big| \frac{A}{p} - A(p,b) \Big|^2 = \sum_{h=1}^{p-1} \Big| S\Big(\frac{h}{p}\Big) \Big|^2.$$

2) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$k \sum_{b=0}^{k-1} \Big| \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} A\Big(\frac{k}{d}, b\Big) \Big|^2 = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,k)=1}}^{k} \Big| S\Big(\frac{h}{k}\Big) \Big|^2.$$

bitte wenden

Aufgabe 31*.

Zeigen Sie die „Zwillingsformel“ für die quadratfreien Zahlen

$$\sum_{n\le x}\mu^2(n)\mu^2(n+1) = c\,x + \mathrm{o}(x) \qquad \text{mit einem } c>0.$$

Hinweise:

1. Man verwende

$$\mu^2(n) = \sum_{d|n,d^2|n}\mu(d)$$

und zeige

$$\begin{aligned} S(x) \underset{\mathrm{Df}}{=} & \sum_{n\le x}\mu^2(n)\,\mu^2(n+1) \\ = & \sum_{\substack{d_1\le x^{1/8}, d_2\le x^{1/8}\\ (d_1,d_2)=1}} \mu(d_1)\,\mu(d_2)\#\big\{n\le x, n\equiv 0(d_1^2), n+1\equiv 0(d_2^2)\big\} + \mathrm{o}(x). \end{aligned}$$

2. Aus 1. erhält man

$$S(x) = x\sum_{\substack{d_1,d_2=1\\ (d_1,d_2)=1}} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1^2d_2^2} + \mathrm{o}(x).$$

3. Die d_1, d_2–Summe in 2. hat den Wert $c = \dfrac{1}{\zeta(2)}\displaystyle\prod_p \frac{p^2-2}{p^2-1} > 0$.