Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

26.01.2006

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 12

Abgabe: Donnerstag, den 02.02.2006, vor der Vorlesung

Aufgabe 32.
Eine berühmte, bis heute unbewiesene Vermutung von Emil Artin (1898–1962) besagt, daß jedes $n > 1$, welches kein Quadrat ist, für unendlich viele Primzahlen Primitivwurzel ist.
Für $x \geq 4$ bezeichne $A(x)$ die Anzahl der $n \leq x$, die zu keinem $p \leq x^{1/2}$ Primitivwurzel sind. Dann gilt

$$A(x) = \mathrm{O}(x^{1/2} \ln x).$$

Hinweise: Benutzen Sie das Montgomerysche Sieb. Es reicht, in L nur den Beitrag der $p \leq Q$ zu berücksichtigen. Die Summe $\displaystyle\sum_{p \leq Q} \frac{\varphi(p-1)}{p - \varphi(p-1)}$ kann nach unten und oben durch $cQ(\ln Q)^{-1}$ abgeschätzt werden.

Aufgabe 33.
Sei

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \exists\, a, b \in \mathbb{Z} : \; n = a^2 + b^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist nach Euler $f(n) = 1$ genau dann, wenn jeder Primteiler p von n mit $p \equiv 3(4)$ in n in gerader Potenz auftritt. g sei vollständig multiplikativ definiert durch

$$g(2) = 0, \; g(p) = \begin{cases} 1, & p \equiv 1 \bmod 4 \\ -1, & p \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

1) Die Dirichlet–Reihe $G(s) = \displaystyle\sum_n \frac{g(n)}{n^s}$ konvergiert kompakt für $\sigma > 0$.

2) Sei $F(s) = \displaystyle\sum_n f(n)\, n^{-s}$,

$$P(s) = \prod_{p \equiv 3(4)} (1 - p^{-2s})^{-1} \qquad \Big(\sigma > \frac{1}{2}\Big).$$

Dann gilt für $\sigma > 1$

$$Q^2(s) = (1 - 2^{-s})^{-1}\, \zeta(s)\, G(s)\; P(s).$$

Aufgabe 34.
Geben Sie alle Charaktere mod 15 an.