

Übungen zur Vorlesung  
**Zahlentheorie II – WS 2005/2006**  
**Blatt 2**

Abgabe: Donnerstag, den 10.11.2005, vor der Vorlesung

**Aufgabe 3.**

Sei  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}_0$ . Eine Menge  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}_0$ , heißt (additives) **Komplement** zu  $\mathcal{A}$ , wenn

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \supseteq \mathbb{N}$$

gilt. Sei  $\mathcal{B}$  Komplement zu

$$\mathcal{A} = \{0, 1\} \text{ vereinigt mit der Menge der Primzahlen.}$$

Zeigen Sie: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$B(n) = \#\{1 \leq b \leq n, b \in \mathcal{B}\} \geq c \cdot \ln(n+1)$$

mit einem universellen  $c > 0$ .

**Aufgabe 4.**

Konstruieren Sie Mengen  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}$  mit  $0 < \sigma(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{B}) < \frac{1}{2}$  und

(a)  $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B})$  bzw.

(b)  $\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{B}) > \sigma(\mathcal{A}) + \sigma(\mathcal{B})$ .

**Aufgabe 5.**

(a)  $25 = 3^2 + 4^2 + 0^2$ , aber die Gleichung  $25 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  besitzt keine Lösung mit  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ .

(b) Für  $a \in \mathbb{N}$  hat  $n = 4^a \cdot 25$  - bis auf Vertauschungen - nur die Darstellung

$$n = (2^a \cdot 3)^2 + (2^a \cdot 4)^2 + 0^2$$

als Summe dreier Quadrate.