Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

24.11.2005

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, den 01.12.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 13.

Identitätssatz für Dirichlet–Reihen. Die Dirichlet–Reihen $A(s) = \sum_n a_n\, n^{-s}$ und $B(s) = \sum_n b_n\, n^{-s}$ seien absolut konvergent und holomorph für $\sigma > 1$. Es existiere eine Folge (s_k) mit $\sigma_k = \operatorname{Re} s_k > 1$, $\sigma_k \longrightarrow \infty$ für $k \longrightarrow \infty$ und $A(s_k) = B(s_k)\ \forall\, k$. Dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 14.

Bezeichne für $n > 1$ $f(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n als Produkt von Zahlen > 1, d.h.

$$f(n) = \sum_{k \geq 1} \#\big\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k,\quad n_j \geq 2,\quad n = n_1 \ldots n_k\big\}.$$

$f(1) = 1$. Dann gilt für ein $\sigma_0 > 1$ und alle s mit $\operatorname{Re} s > \sigma_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s} = \big(2 - \zeta(s)\big)^{-1}.$$

Bestätigen Sie die Identität zumindest formal, d.h. ohne Konvergenz–Überlegungen.

Aufgabe 15.

Sei für $x \geq 1$

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Newman'schen Tauber–Satzes

$$\int_0^{\infty} M\big(e^y\big)\ e^{-y}\, dy \quad \text{konvergiert.}$$

b) Leiten Sie aus a)

$$M(x) = \mathrm{o}(x) \quad \text{her.}$$