Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik 08.12.2005
Prof. Dr. D. Wolke
Yvonne Buttkewitz

Übungen zur Vorlesung

Zahlentheorie II – WS 2005/2006
Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, den 15.12.2005, vor der Vorlesung

Aufgabe 19.

1) Es sei $A = (a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, die wir uns als Dezimalzahlen vorgeben. Schreibt man die Ziffern von a_1 nacheinander hin, beginnend mit $0,**\ldots$, hängt die von a_2 an, sodann die von a_3 usw., dann erhält man eine reelle Zahl $r_A \in [0,1]$.
Die Folge A habe folgende Eigenschaften
   a) A ist schwach monoton steigend;
   b) zu jedem $k \geq k_0$ existiert ein n, so daß $10^{k-1} \leq a_n < a_{n-1} < 10^k$ gilt.
   Zeigen Sie: r_A ist irrational.
2) Fallen die quadratfreien Zahlen, die Primzahlen, die Quadratzahlen unter 1)?

Aufgabe 20.
Sei $k(n) = \mathrm{kgV}(1,\ldots,n)$ Dann gilt

$$k(n) = \exp\big(n(1+\mathrm{o}(1))\big) \quad (n\to\infty).$$

Aufgabe 21.
Eine reelle Zahl $\alpha \in [0,1]$ heißt normal (zur Basis 10), wenn in der Dezimaldarstellung

$$\alpha = 0, z_1z_2\ldots \quad \big(z_j \in \{0,1,\ldots,9\}\big)$$

alle Ziffern asymptotisch gleich häufig vorkommen, d.h. für alle $z \in \{0,1,\ldots,9\}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{n \leq N, z_n = z\} \text{ existiert}$$

und $= \frac{1}{10}$ ist. Konstruieren Sie eine normale Irrationalzahl.