Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Y. Buttkewitz

31.10.2006

Übungen zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Blatt 2

Abgabe: Dienstag, 07.11.2006 vor der Vorlesung

Aufgabe 4.

a) Beweisen Sie die „zweite Möbius'sche Umkehrformel": Sei $F : [1, \infty) \to \mathbb{C}$ und für $x \geq 1$ $G(x) = \sum_{n \leq x} F\left(\frac{x}{n}\right)$. Dann gilt für alle $x \geq 1$

$$F(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)\ G\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

b) Folgern Sie aus a) (mit welchem F?)

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = \mathrm{O}(1).$$

Beinhaltet dies die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n} \frac{\mu(n)}{n}$?

Aufgabe 5.
Ein Beispiel, das zur Vorsicht beim Vertauschen von Summe und O– (o–Zeichen) mahnt. Sei f eine zahlentheoretische Funktion.
$g : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$, monoton.

a) Aus $f(n) = \mathrm{O}\big(g(n)\big)$ $(n \in \mathbb{N})$ folgt

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \mathrm{O}\Big(\sum_{n \leq x} g(n)\Big).$$

bitte wenden

b) Sei $f(n) = \mathrm{o}\big(g(n)\big)$. Es divergiere die Summe $\sum\limits_{n} g(n)$. Dann gilt

(*)
$$\sum_{n \le x} f(n) = \mathrm{o}\Big(\sum_{n \le x} g(n)\Big).$$

Geben Sie ein Beispiel dafür, dass im Fall der Konvergenz der Summe $\sum g(n)$ nicht auf (*) geschlossen werden kann.

Aufgabe 6.

Zeigen Sie mit Hilfe der Tschebytschev–Ungleichungen, dass es beliebig lange Intervalle ohne Primzahlen gibt. Formulieren Sie dies quantitativ. Wie gut kann man die Länge des längsten Teilintervalls von $[2, x)$ ohne Primzahlen nach unten abschätzen? Erlauben die Tschebytschev–Ungleichungen eine Abschätzung nach oben?