Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke
Y. Buttkewitz

19.12.2006

Übungen zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Blatt 9

Abgabe: Dienstag, 09.01.2007 vor der Vorlesung

Aufgabe 25.
Für $n, a_1, \ldots, a_n, N \in \mathbb{N}$ sei

$$A(N) = \#\big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = N\big\}.$$

Es werde für $|z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^{a_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1 - z^{a_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)\, z^k$$

gesetzt.
Beh. $\forall\, k \in \mathbb{N} : b(k) = A(k)$.

Aufgabe 26.
In Aufgabe 25 nehme man $n = 3,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$. Sei $\omega = \exp\left(\frac{s\pi i}{3}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z}\ \frac{1}{1-z^2}\ \frac{1}{1-z^3} \\ &= \frac{1}{6(1-z)^3} + \frac{1}{4(1-z)^2} + \frac{17}{72(1-z)} + \frac{1}{8(1+z)} + \frac{1}{9(1-\omega z)} + \frac{1}{9(1-\omega^2 z)} \end{aligned}$$

(Partialbruchentwicklung von f)

Für die in Aufgabe 25 definierte Anzahl $A(N)$ besteht in diesem Fall die Gleichung

$$A(N) = \frac{(N+3)^{1/2}}{12} - \frac{7}{72} + \frac{1}{8}(-1)^N + \frac{1}{9}(\omega^N + \omega^{2N}).$$

$A(N)$ ist von $\dfrac{(N+3)^{1/2}}{12}$ um weniger als 1/2 entfernt.

bitte wenden

Aufgabe 27.

Beweis nach Dirichlet, dass höchstens für reelle Charaktere $\chi \bmod k$ $\quad L(1,\chi_1) = 0$ gelten kann:

a) Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass es einen nicht reellen Charakter χ_1 mod k mit $L(1,\chi_1) = 0$ gibt, der Grenzwert

$$\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{1}{\sigma - 1} \prod_{\chi \bmod k} L(\sigma,\chi) \text{ existiert}$$

b) Andererseits gilt – unter Benutzung von $L(\sigma,\chi) = \exp\left(\sum_p \sum_k \frac{\chi(p^k)}{kp^{k\sigma}}\right)$ –

$$\prod_{\chi \bmod k} L(\sigma,\chi) \geq 1 \quad \text{für} \quad \sigma > 1.$$