Mathematisches Institut
Abt. für Reine Mathematik
Prof. Dr. D. Wolke

07.11.2006

Analytische Zahlentheorie

WS 2006/07

Lösungshinweise zu Aufgabe 3.

1. Es soll eine Folge

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad (1 \le a_1 < a_2 < \dots)$$

konstruiert werden, für die

$$\sum_{a_i \le x} \frac{1}{a_i} = \ln\ln x + b + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\ln x}\Big) \tag{1.1}$$

(b eine von $\mathcal{A}$ abhängende Konstante) gilt, aber zugleich $A(x)/x \ln x$ nicht konvergiert $\big(A(x) = \#\{a_i \le x\}\big)$.
Es kann angenommen werden, dass der Primzahlsatz (PZS) richtig ist, denn sonst ist $\mathcal{P} = \{p, p \text{ prim }\}$ eine solche Folge.

2. Aus den PZS ergibt sich für jede Funktion $\delta(x)$ mit $\delta(x) = \mathrm{o}(x)$

$$\pi\big(x + \delta(x)\rangle) - \pi(x) = \mathrm{o}\Big(\frac{x}{\ln x}\Big), \quad \text{insbesondere}$$

$$\#\Big\{p \in \big(x, x + \frac{x}{\ln x}\big]\Big\} \le \frac{1}{2}\,\frac{x}{\ln x} \qquad \text{für } \ x \ge x_0. \tag{2.1}$$

D.h. in einem relativ kurzen Intervall liegen relativ wenige Primzahlen.

3. Wegen $\displaystyle\sum_{n \le y} \frac{1}{n} = \ln y + c + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{y}\Big)$ gilt für $x \ge 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{x < n \le x + \frac{x}{\ln x}} \frac{1}{n} &= \ln\Big(\frac{x + x/\ln x}{x}\Big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{x}\Big) \\
&= \frac{1}{\ln x} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\ln^2 x}\Big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{x}\Big) \quad \text{(durch Entwickeln des } \ln) \\
&= \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\ln x}\Big).
\end{aligned}$$

Dies ist auch richtig, wenn über irgendeine Teilmenge der $n \in \big(x, x + \frac{x}{\ln x}\big]$ summiert wird. Dies zeigt, dass (1.1) auf starke Abänderung der Summanden–Menge wenig reagiert, im Gegensatz zur Asymptotik im PZS.

4. Das Konstruktionsrezept ist nun wie folgt: Man nehme eine sehr rasch gegen ∞ laufende Folge $2 < x_1 < x_2 < \dots$ (Man versuche, alle nötigen Bedingungen für die x_ν zu finden!) In jedem Intervall $I_\nu = \left(x_\nu, x_\nu + \frac{x_\nu}{\ln x_\nu}\right]$ nehme man zu $\mathcal{P}$ alle übrigen $n \in I_\nu$ hinzu. Wenn z.B. $x_\nu \geq \exp(\nu^2)$ ist, folgt mit 3.

$$\sum_{n \in \mathcal{A}, n \notin \mathcal{P}} \frac{1}{n} = \mathrm{O}\Big(\sum_\nu \frac{1}{\ln x_\nu}\Big) = \mathrm{O}(1),$$

d.h. für die neue Folge $\mathcal{A}$ gilt (1.1) wie für $\mathcal{P}$, allerdings mit der Konstanten b. An den Stellen $x_\nu + \frac{x_\nu}{\ln x_\nu}$ enthält $\mathcal{A}$ „zu viele" Elemente. Hier wird die ansonsten für $\mathcal{P}$ gültige Asymptotik verletzt. (s.2.)