Modelltheorie II[1]

Martin Ziegler

Freiburg, Sommersemester 1996

[1]Version 13b (15. November 2006)

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Diese Vorlesung über *Stabilitätstheorie* ist die Fortsetzung einer Vorlesung über Modelltheorie, die Bernhard Herwig im Wintersemester 95/96 in Freiburg gehalten hat.
Der Vorlesung fehlt ein letztes Kapitel über streng minimale Mengen. Die knappe Zeit hat leider nicht gereicht.

In einer späteren Version wird das Skript mehr Beispiele enthalten. Insbesondere eine Diskussion von Begriffen der algebraischen Geometrie und von differentiell abgeschlossenen Körpern.

Kapitel 1

Der Satz von Morley

Wir halten in diesem Abschnitt eine abzählbare Sprache L und eine vollständige L–Theorie T fest, die nur unendliche Modelle hat.

Aus dem Satz von Löwenheim–Skolem folgt:

Bemerkung 1.0.1
T hat Modelle jeder unendlichen Mächtigkeit κ.

T heißt κ–kategorisch, wenn T (bis auf Isomorphie) nur ein Modell der Mächtigkeit κ hat. Ein Modell M heißt κ–kategorisch, wenn seine vollständige Theorie $\mathrm{Th}(M)$ κ–kategorisch ist.

Wir beweisen in diesem Kapitel

Satz 1.0.2 (Morley [6])
T ist entweder in allen oder in keiner überabzählbaren Kardinalzahl kategorisch.

1.1 ω–stabile Theorien

T heißt ω–stabil, wenn es über jeder abzählbaren Parametermenge nur abzählbar viele 1–Typen gibt. Wir wollen zeigen, daß Theorien, die in einer überabzählbaren Kardinalzahl kategorisch sind, ω–stabil sind.

Definition 1.1.1
Sei I eine lineare Ordnung und M eine L–Struktur. Eine Folge $(a_i)_{i\in I}$ von paarweise verschiedenen Elementen von M ist eine Folge von Orderindiscernibles, *wenn für je zwei aufsteigende Folgen $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_k$ von Indices und alle L–Formeln ϕ*

$$M \models \phi(a_{i_1}, \ldots a_{i_k}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \ldots a_{j_k})$$

Lemma 1.1.1
T hat für alle I Orderindiscernibles vom Ordnungstyp I.

Beweis:
Wir erweitern L um neue Konstanten c_i $(i \in I)$. Mit $\overline{c}$ und $\overline{d}$ notieren wir Tupel $c_{i_1}, \ldots c_{i_k}$ mit echt aufsteigenden Indizes. Wir müssen zeigen, daß die Aussagenmenge

$$T \cup \left\{\phi(\overline{c}) \leftrightarrow \phi(\overline{d}) \mid \overline{c},\, \overline{d} \in I,\ \phi\, L\text{–Formel}\right\} \cup \{c_i \neq c_j \mid i \neq j\}$$

endlich erfüllbar ist. Dazu können wir annehmen, daß I die Ordnung der natürlichen Zahlen ist und die Stelligkeit der Tupel $\overline{c}$, $\overline{d}$ die feste Zahl k. Sei Δ eine endliche Menge von L–Formeln $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ und $a_0, a_1, \ldots$ paarweise verschiedene Elemente eines T–Modells M. Die Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned}&\{i_1 < \ldots < i_k\} \sim \{j_1 < \ldots < j_k\} \iff \\ &\qquad M \models \phi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) \text{ für alle } \phi \in \Delta\end{aligned}$$

teilt die Menge alle k–elementigen Teilmengen von ω in höchstens $2^{|\Delta|}$ Klassen ein. Nach dem Satz von Ramsey gibt es eine unendliche *homogene* Teilmenge J von ω, für die also

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \sim \{j_1, \ldots, j_k\}$$

für alle $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_k \in J$. $(M, a_i)_{i\in J}$ ist jetzt ein Modell von

$$T \cup \left\{\phi(\overline{c}) \leftrightarrow \phi(\overline{d}) \mid \overline{c},\, \overline{d} \in I,\ \phi \in \Delta\right\} \cup \{c_i \neq c_j \mid i \neq j\}$$

□

<u>Übung</u> 1.1.1
I und J seien zwei unendliche lineare Ordnungen, $(a_i)_{\in I}$ eine Folge von Elementen des Modells M. Dann gibt es ein Modell N mit einer Folge $(b_j)_{i\in J}$ von Indiscernibles mit folgender Eigenschaft: Wenn für eine Formel $\phi(x)$ und ein aufsteigend indiziertes Tupel $\overline{b}$

$$N \models \phi(\overline{b}),$$

dann gibt es ein aufsteigend indiziertes Tupel $\bar{a}$ mit $M \models \phi(\bar{a})$.

Lemma 1.1.2
T hat für alle κ ein Modell, in dem über jeder abzählbaren Parametermenge nur abzählbar viele Typen realisiert sind.

BEWEIS:
Sei T^{Sk} die *Skolemisierung* von T.

T^{Sk} ist eine L^{Sk}–Theorie mit folgenden Eigenschaften:

1. $T \subset T^{\text{Sk}}$
2. Jedes Modell von T läßt sich zu einem Modell von T^{Sk} expandieren.
3. L^{Sk} ist abzählbar.
4. T^{Sk} ist universell und hat Quantorenelimination.

Man erhält T^{Sk} aus T, indem man für jede quantorenfreie L–Formel $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ ein n–stelliges Funktionszeichen f_ϕ einführt und das Skolemaxiom

$$\forall x_1 \ldots x_n (\exists x_0 \phi(x_0, \ldots, x_n) \rightarrow \phi(f_\phi(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n))$$

zu T hinzufügt. Diesen Prozess iteriert man abzählbar oft, bis es für jede quantorenfreie Formel ϕ aus L^{Sk} ein Funktionszeichen f_ϕ und ein Skolemaxiom gibt.

Sei nun N^{Sk} ein Modell von T^{Sk} mit Ordnungsindiscernibles $(a_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$. Die von $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ erzeugte Unterstruktur

$$M^{\text{Sk}} = \left\{ t(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_k}) \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \kappa,\ t\, L^{\text{Sk}}\text{–Term} \right\}$$

ist eine elementare Unterstruktur der Mächtigkeit κ. Sei A eine abzählbare Teilmenge von M^{Sk}. Wir wollen zeigen, daß in M^{Sk} nur abzählbar viele Typen über A realisiert sind. Wir wählen eine abzählbare Teilmenge J von κ sodaß A im Erzeugnis von

$$B := \{a_\alpha\}_{\alpha\in J}$$

liegt. Weil für alle b

$$\text{tp}(b/B) \vdash \text{tp}(b/A),$$

genügt es zu zeigen, daß über B nur abzählbar viele Typen realisiert sind. Für jeden L^{Sk}–Term t ist der Typ $\text{tp}(t(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_k})/B)$ bestimmt durch den Typ des k–tupels $(a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_k})$ über B. Weil aber die a_α Ordnungsindiscernibles sind, sind diese Typen bestimmt durch die Lage der Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ relativ zu J. Als abzählbare Wohlordnung hat J aber nur abzählbar viele Schnitte. □

Folgerung 1.1.3
Wenn T in einer überabzählbaren Kardinalzahl κ kategorisch ist, ist T ω–stabil.

BEWEIS:
Wenn T nicht ω–stabil ist, gibt es ein Modell M mit einer abzählbaren Parametermenge A, über der ω_1–viele Typen realisiert sind. Wir können annehmen, daß M die Mächtigkeit κ hat. Wegen Lemma 1.1.2 ist T nicht κ–kategorisch. □

Definition 1.1.2
Sei λ eine unendliche Kardinalzahl. T heißt λ–stabil, wenn es in jedem Modell von T über jeder Parametermenge der Mächtigkeit λ höchstens λ viele 1–Typen gibt.

Lemma 1.1.4
Wenn T ω–stabil ist, ist T λ–stabil für jedes λ.

Beweis:
Sei M ein Modell von T und $A \subset M$ eine Menge der Mächtigkeit λ, über der es mehr als λ viele Typen gibt. Wir nennen eine $L(A)$–Formel *groß*, wenn sie zu mehr als λ vielen Typen aus $S_1(A)$ gehört. Weil $|A| \leq \lambda$, gehört jede große Formel ϕ zu mehr als λ vielen Typen, die nur große Formeln enthalten. Man schließt, daß ϕ zwei disjunkte große Formeln enthält.

Man kann also einen binären Baum

$$(\phi_s)_{s \in 2^{<\omega}}$$

aus großen Formeln konstruieren, für die

1. $M \models \phi_{si} \rightarrow \phi_s \ (i < 2)$
2. $M \models \neg(\phi_{s0} \wedge \phi_{s1})$.

Sei B eine abzählbare Teilmenge von A, die alle Parameter der ϕ_s enthält. Für jeden Pfad $\sigma \in 2^\omega$ sei p_σ ein Typ über B, der alle ϕ_s mit $s \subset \sigma$ enthält. Die 2^ω vielen p_σ sind paarweise verschieden. □

Lemma 1.1.5
Sei κ überabzählbar. Wenn T κ–stabil ist, hat T für jedes $\mu < \kappa$ ein Modell der Mächtigkeit κ, das μ^+–saturiert ist.

Beweis:
Konstruiere eine stetige elementare Kette $(M_\alpha)_{\alpha \in \mu^+}$ von Modellen der Mächtigkeit κ, sodaß in $M_{\alpha+1}$ jeweils alle Typen über M_α realisiert sind. $M = \bigcup_{\alpha<\mu^+} M_\alpha$ hat die Mächtigkeit κ und ist μ^+–saturiert. □

Folgerung 1.1.6
T ist genau dann κ–kategorisch, wenn alle Modelle der Mächtigkeit κ saturiert sind.

Beweis:
Die Behauptung gilt auch für $\kappa = \omega$. Wir nehmen aber zuerst an, daß κ überabzählbar ist. Wenn alle Modelle der Mächtigkeit κ saturiert sind, ist T natürlich κ–kategorisch. Wenn T κ–kategorisch ist, müssen wir zeigen, daß T ein saturiertes Modell der Mächtigkeit κ hat. Wegen Lemma 1.1.3 und 1.1.4 ist T aber κ–stabil. Das Modell der Mächtigkeit κ ist daher μ^+–saturiert für alle $\mu < \kappa$ und damit saturiert.

Wenn T ω–kategorisch ist, gibt es nur endlich viele Typen über jeder endlichen Parametermenge. Damit läßt sich ein abzählbares saturiertes Modell konstruieren. $\square$

1.2 Primerweiterungen

Eine Struktur M heißt *Primerweiterung* der Teilmenge A, wenn sich jede elementare Abbildung $A \longrightarrow N$ zu einer elementaren Einbettung $M \overset{\prec}{\longrightarrow} N$ fortsetzen läßt.

Satz 1.2.1
Für eine (abzählbare) Theorie sind äquivalent:

a) *Jede Parametermenge hat eine Primerweiterung. (Man sagt: T* hat Primerweiterungen.*)*

b) *Über jeder Parametermenge A sind die isolierten Typen dicht im Typenraum* $\mathrm{S}_1(A)$.

Beweis:
b $\Rightarrow$ a: Sei A eine Teilmenge des Modells M. Wir wählen eine Folge $(b_\alpha)_{\alpha\in\mu}$ von Elementen von M, sodaß (mit der Bezeichnung $B_\alpha = \{b_\beta \mid \beta < \alpha\}$)

1. alle $\mathrm{tp}(b_\alpha/AB_\alpha)$ isoliert sind,
2. kein Element von $M \setminus B_\mu$ atomar über AB_μ ist.

Aus der Maximalität folgt, daß $A \subset B_\mu$. Wegen b) wird jede konsistente $L(AB_\mu)$–Formel von einem Element in M realisiert, das atomar über AB_μ ist und wegen 2. in B_μ liegt. $M_0 = B_\mu$ ist also eine elementare Unterstruktur von M.

Die Eigenschaft 1. hat zur Folge, daß M_0 Primerweiterung von A ist: Jede elementare Abbildung $f : A \longrightarrow N$ läßt sich durch sukzessives Realisieren der isolierten Typen $g(\mathrm{tp}(b_\alpha)/AB_\alpha)$ zu einer elementaren Einbettung $g : M_0 \longrightarrow N$ fortsetzen.

a $\Rightarrow$ b: Nehmen wir an, daß über A die isolierten Typen nicht dicht sind. Es gibt also eine konsistente $L(A)$–Formel $\phi_0(x)$, unter der es für jede konsistente $L(A)$–Formel $\phi(x)$ eine $L(A)$–Formel $\phi'(x)$ gibt, für die $\phi\wedge\phi'$ und $\phi\wedge\neg\phi'$ beide konsistent sind. Sei A_0 eine abzählbare Teilmenge von A, in der die Parameter von $\phi_0(x)$ liegen, und so, daß die Klasse der $L(A_0)$–Formeln unterhalb von $\phi_0(x)$ unter der Operation $\phi \mapsto \phi'$ abgeschlossen ist[1]. In der abzählbaren Theorie $T_{A_0} := \mathrm{Th}(M, a)_{a\in A_0}$ liegen die isolierten Typen nicht dicht. T_A hat daher kein Primmodel, was bedeutet, daß A_0 keine Primerweiterung hat. □

Eine Primerweiterung der Gestalt B_μ nennt man *konstruktibel*. Der Beweis zeigt, daß, wenn die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, jede Parametermenge eine konstruktible Erweiterung hat.

[1]Sei (M_0, A_0) eine abzählbare elementare Unterstruktur von (M, A), für die A_0 die Parameter von ϕ_0 enthält. Dann hat A_0 die gewünschten Eigenschaften.

Folgerung 1.2.2
Wenn T ω–stabil ist, hat jede Menge von Parametern A eine Primerweiterung, die atomar über A ist.

Beweis:
Wenn die $L(A)$–Formel ϕ nicht zu einem isolierten Typ gehört, kann man wie im Beweis von 1.1.4 unterhalb von ϕ einen binären Baum von Formeln bauen. Es genügt also zu zeigen, daß konstruktible Erweiterungen atomar über A sind. Nehmen wir an, daß alle b_α atomar über AB_α sind, wobei $B_\alpha = \{b_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Wir zeigen durch Induktion über α, daß für alle $\overline{b} \in B_\alpha$ das Tupel $b_\alpha\overline{b}$ atomar über A ist: Wir erweitern $\overline{b}$ zu einem Tupel $\overline{c} \in B_\alpha$, sodaß b_α atomar über $A\overline{c}$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\overline{c}$ atomar über A. Also ist $b_\alpha\overline{c}$ und damit auch das Teiltupel $b_\alpha\overline{b}$ atomar über A. □

Satz 1.2.3
Wenn T ω–stabil ist, hat jedes überabzählbare Modell M eine echte elementare Erweiterung N, in der über keiner abzählbaren Teilmenge von M neue Typen realisiert werden.

Beweis:
Weil man sonst einen binären Baum von Formeln konstruieren könnte, gibt es eine $L(M)$–Formel $\phi_0(x)$, die in M von überabzählbar vielen Elementen erfüllt wird und die minimal mit dieser Eigenschaft ist: Für alle $L(M)$–Formeln $\psi(x)$ ist $(\phi_0 \wedge \psi)(M)$ oder $(\phi_0 \wedge \neg\psi)(M)$ abzählbar.

Die Formelmenge

$$p(x) = \{\psi(x) \mid (\phi_0 \wedge \psi)(M) \text{ überabzählbar}\}$$

ist ein Typ über M, der in M nicht realisiert wird. Weil jede Formel aus p von allen, bis auf eine abzählbare Ausnahmemenge, Elementen von $\phi(M)$ erfüllt wird, wird jede abzählbare Teilmenge von p in M realisiert.

Sei b eine Realisierung von p und N eine atomare Primerweiterung von $M \cup \{b\}$. Betrachte ein beliebiges Element $c \in N$. Fixiere eine Formel $\chi(b, y)$, die den Typ $\mathrm{tp}(c/M \cup \{b\})$ isoliert. Dann ist für jede $L(M)$–Formel $\phi(y)$

$$\phi(y) \in \mathrm{tp}(c/M) \Longleftrightarrow \phi'(x) \in p,$$

wobei $\phi'(x) = \forall y\, \chi(x, y) \rightarrow \phi(y)$. Wenn nun A eine abzählbare Teilmenge von M ist, gibt es ein $b' \in M$, das

$$\{\exists y \chi(x, y)\} \cup \{\phi'(x) \mid \phi(y) \in \mathrm{tp}(c/A)\}$$

realisiert. Wähle $c' \in M$ mit $M \models \chi(b', c')$. Dann realisiert c' den Typ $\mathrm{tp}(c/A)$.
□

Folgerung 1.2.4
Wenn T in einer überabzählbaren Kardinalzahl kategorisch ist, ist T auch in ω_1 kategorisch.

Beweis:
Wenn T nicht ω_1–kategorisch ist, gibt es ein Modell M der Mächtigkeit ω_1, das nicht saturiert ist. Mit Hilfe von 1.2.3 konstruiert man aus M Modelle jeder überabzählbaren Mächtigkeit κ, die nicht ω_1–saturiert sind. Aus 1.1.6 folgt, daß T in keinem κ kategorisch ist. □

Ein Modell M heißt *minimale* Erweiterung der Teilmenge A, wenn M keine echte elementare Unterstruktur hat, die A enthält.

Lemma 1.2.5
Wenn T Primerweiterungen hat, sind minimale Erweiterungen prim und, als Primerweiterungen, eindeutig bestimmt.

Beweis:
Klar. □

1.3 Vaughtsche Paare

Sei $M \prec N$ eine echte elementare Erweiterung und $\phi(x)$ eine $L(M)$–Formel und $\phi(M)$ unendlich. Im Allgemeinen wird $\phi(M)$ eine echte Teilmenge von $\phi(N)$ sein. Wenn $\phi(M) = \phi(N)$ nennt man $M \prec N$ ein *Vaughtsches Paar* für $\phi(x)$.

Eine Umformulierung ist

Bemerkung 1.3.1
Sei $\phi(x)$ eine Formel ohne Parameter, die eine unendliche Teilmenge definiert. Dann hat T genau dann kein Vaughtsches Paar für $\phi(x)$, wenn jedes Modell M minimale Erweiterung von $\phi(M)$ ist.

Satz 1.3.2
Wenn T ein Vaughtsches Paar für $\phi(x)$ hat, hat T ein Modell M der Mächtigkeit ω_1, über dem $\phi(x)$ definiert ist und $\phi(M)$ abzählbar ist.

Beweis:
Wir können annehmen, daß ϕ keine Parameter enthält; sonst nehmen wir Konstanten für die Parameter in die Sprache auf. Sei $M_0 \prec N_0$ ein Vaughtsches Paar für $\phi(x)$. Wir zeigen zuerst, daß wir annehmen können, daß M_0 und N_0 abzählbar und ω–homogen und isomorph sind.

Dazu betrachten wir die Struktur

$$\mathfrak{N}_0 = (N_0, M_0),$$

in der M_0 die Ausdehnung eines unären Prädikats ist. Sei $\mathfrak{N}_1 = (N_1, M_1)$ speziell und elementar äquivalent zu $\mathfrak{N}_0$. Dann ist $M_1 \prec N_1$ ein Vaughtsches Paar für $\phi(x)$ und zusätzlich sind M_1 und N_1 isomorph. Sei $f_1 : N_1 \to M_1$ ein Isomorphismus. Die Bemerkung nach dem nächsten Lemma liefert uns eine abzählbare, ω–homogene Struktur

$$(N_2, M_2, f_2) \equiv (N_1, M_1, f_1).$$

Wir erhalten so ein Vaughtsches Paar $M_2 \prec N_2$ für $\phi(x)$, für das M_2 und N_2 abzählbar, ω–homogen und isomorph sind.

Wir konstruieren jetzt eine stetige elementare Kette $(M_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$, sodaß für alle α

$$(M_{\alpha+1}, M_\alpha) \cong (N_0, M_0).$$

Diese Konstruktion überlebt die Limesschritte, weil die Vereinigung von abzählbar vielen Modellen, die isomorph zu M_0 sind, wieder ω–homogen ist und die gleichen n–Typen wie M_0 realisiert. Eine solche Vereinigung ist also nach dem nächsten Lemma wieder isomorph zu M_0. M_{ω_1}, die Vereinigung der M_α, ist das gewünschte Modell, weil $\phi(M_{\omega_1}) = \phi(M_0)$ abzählbar ist. □

Lemma 1.3.3

1. *T hat ein abzählbares ω–homogenes Modell.*

2. *Zwei abzählbare ω–homogene Modelle sind genau dann isomorph, wenn sie für alle n die gleichen Typen aus $\mathrm{S}_n(\emptyset)$ realisieren.*

Beweis:
1. Man findet das gesuchte Modell als Vereinigung einer elementaren Kette $M_0 \prec M_1 \prec \ldots$ von abzählbaren Modellen, die für alle i die folgende Eigenschaft haben: Für alle $\overline{a}, \overline{b} \in M_i$, die denselben Typ haben und für jeden Typ $p(x, \overline{a})$, der in M_i realisiert ist, ist der Typ $p(x, \overline{b})$ in M_{i+1} realisiert.

2. M_0 und M_1 seien ω–homogen und für alle n seien in M_0 und M_1 die gleichen n–Typen realisiert. Wir zeigen, daß man jeden endlichen partiellen Isomorphismus zwischen M_0 und M_1 schrittweise fortsetzen kann. Wenn M_0 und M_1 abzählbar sind, folgt dann $M_0 \cong M_1$. Seien also $\overline{a}_0$ und $\overline{a}_1$ zwei Tupel aus M_0 und M_1, die den selben Typ haben, und sei ein Element b_0 aus M_0 vorgegeben. Nach Voraussetzung ist der Typ $\mathrm{tp}(\overline{a}_0 b_0)$ auch in M_1 realisiert, sagen wir durch $\overline{a}'_1 b'_1$. Weil M_1 ω–homogen ist, findet man $b_1 \in M_1$, sodaß $\mathrm{tp}(\overline{a}'_1 b'_1) = \mathrm{tp}(\overline{a}_1 b_1)$. Es folgt $\mathrm{tp}(\overline{a}_0 b_0) = \mathrm{tp}(\overline{a}_1 b_1)$. $\square$

Der Beweis von 1. liefert auch das folgende: Sei L_0 eine Teilsprache von L. Dann hat T ein abzählbares Modell M, für das $M \restriction L_0$ ω–homogen ist.

Folgerung 1.3.4
Wenn T ω_1–kategorisch ist, hat T kein Vaughtsches Paar.

Beweis:
Ein Modell der Mächtigkeit ω_1, mit einer abzählbar unendlichen definierbaren Teilmenge, kann nicht saturiert sein. Verwende jetzt 1.1.6. $\square$

Folgerung 1.3.5
Sei T ω_1–kategorisch, M ein Modell und $\phi(M)$ eine über $A \subset M$ definierbare unendliche Teilmenge. Dann ist M –eindeutig bestimmte– Primerweiterung von $A \cup \phi(M)$.

1.4 Streng minimale Mengen

Definition 1.4.1
A sei eine Teilmenge und a ein Element des Modells M. a heißt algebraisch über A, wenn a zu einer endlichen ("algebraischen") A–definierbaren Menge $\phi(M)$ gehört.

Der algebraische Abschluß von A in M, ist die Menge

$$\mathrm{acl}^M(A)$$

aller über A algebraischen Elemente von M.

Bemerkung 1.4.1

1. $A \subset \mathrm{acl}^M(A)$
2. $\mathrm{acl}^M(A)$ *ist die Vereinigung aller* $\mathrm{acl}^M(A_0)$, *wobei A_0 alle endlichen Teilmengen von A durchläuft.*
3. $\mathrm{acl}^M(\mathrm{acl}^M(A)) = \mathrm{acl}^M(A)$.

Der Typ $\mathrm{tp}(a/A)$ eines (über A) algebraischen Elements heißt *algebraisch*.

<u>Übung</u> 1.4.1

1. Algebraische Typen sind isoliert.
2. Sei $A \subset M$ und M genügend saturiert. Dann ist $p \in S_1(A)$ genau dann algebraisch, wenn $p(M)$ endlich ist.

Man nennt die Zahl $\deg(p)$ der Realisierungen eines algebraischen Typs p den *Grad* von p. Der Grad von $\mathrm{tp}(a/A)$ ist die Zahl der *Konjugierten*[2] von a über A in genügend saturierten Modellen.

Definition 1.4.2
Eine unendliche definierbare Teilmenge $\phi(M)$ von M heißt minimal*, wenn jede definierbare Teilmenge von $\phi(M)$ endlich oder koendlich in $\phi(M)$ ist. Eine Formel $\phi(x)$ heißt* streng minimal*, wenn in allen Modellen M, die die Parameter von $\phi(x)$ enthalten, $\phi(M)$ minimal ist.*

<u>Übung</u> 1.4.2
Sei M ein Modell und $\phi(x)$ über M definiert. Dann ist $\phi(x)$ genau dann streng minimal, wenn $\phi(M)$ minimal ist, und wenn es für alle L–Formeln $\psi(x, \overline{y})$ eine Schranke k gibt, sodaß für alle $\overline{a} \in M$, die Menge $\phi(M) \cap \psi(M, \overline{a})$, falls sie endlich ist, höchstens k viele Elemente hat.

Lemma 1.4.2
Wenn T ω–stabil ist, enthält jede unendliche definierbare Teilmenge von M eine minimale Menge $\phi(M)$. Wenn M ω–saturiert ist, ist $\phi(x)$ streng minimal.

[2] Ein Automorphismus von M heißt Automorphismus über A, oder A–Automorphismus, wenn f die Menge A punktweise festhält. Zwei Elemente a und b sind über A konjugiert (in M), wenn es einen A–Automorphismus von M gibt, der a in b überführt.

Beweis:
Wenn $\phi_0(M)$ keine minimale Menge enthält, könnte man, mit $\phi_0(x)$ beginnend einen binären Baum von Formeln definieren, die alle unendliche Teilmengen von M definieren. Wenn $\phi(x)$ nicht streng minimal ist, gibt es L–Formeln $\phi_1(x, \overline{y})$ und $\phi_2(x, \overline{y})$ und Parameter $\overline{m}_1$ und $\overline{m}_2$ in einer elementaren Erweiterung N von M sodaß $\phi_1(N, \overline{m}_1)$ und $\phi_2(N, \overline{m}_2)$ disjunkt sind, unendlich und in $\phi(N)$ enthalten. $\overline{m}_1$ und $\overline{m}_2$ realisieren also den Typ

$$\begin{array}{rcl} p(y_1, y_2) & = & \{\forall x\, \neg(\phi_1(x, y_1) \wedge \phi_2(x, y_2))\} \\ & \cup & \{\exists^{\geq n} x\, \phi_1(x, y_1) \mid n < \omega\} \\ & \cup & \{\exists^{\geq n} x\, \phi_2(x, y_2) \mid n < \omega\} \\ & \cup & \{\forall x\ \phi_1(x, y_1) \rightarrow \phi(x)\} \\ & \cup & \{\forall x\ \phi_2(x, y_2) \rightarrow \phi(x)\} \end{array}$$

$p(y_1, y_2)$ ist in M nicht realisiert, M kann also nicht ω–saturiert sein, wenn $\phi(x)$ nicht streng minimal ist. □

Lemma 1.4.3
$\phi(M)$ ist genau dann minimal, wenn $\phi(x)$ zu genau einem nicht–algebraischen Typ über M gehört.

Beweis:
Die algebraischen Typen über M sind genau die realisierten Typen $\mathrm{tp}(m/M)$ (für $m \in M$). $\phi(x)$ gehört also genau dann zu einem nicht–algebraischen Typen p, wenn die Formelmenge

$$\{\phi(x)\} \cup \{x \neq m \mid m \in M\}$$

endlich erfüllbar ist, das heißt, wenn $\phi(M)$ unendlich ist. p ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn $\phi(M)$ nicht zwei disjunkte unendliche definierbare Mengen enthält. □

Ein nicht–algebraischer Typ, der eine streng minimale Formel enthält, heißt *streng minimal*. Wir haben eben bewiesen, daß jede streng minimale $L(A)$–Formel zu genau einem streng minimalen Typ über A gehört.

Definition 1.4.3
Ein nicht–algebraischer Typ $p \in \mathrm{S}_1(A)$, der für alle $B \supset A$ genau eine nicht algebraische Erweiterung auf $\mathrm{S}_1(B)$ hat, heißt minimal.

Beispiel
T sei die Theorie einer Struktur $M = (M, P_1, P_2, \ldots)$, in der die P_i eine echt absteigende Folge von Teilmengen ist. Der Typ $p \in \mathrm{S}_1(\emptyset)$, eines Elements im Durchschnitt der P_i ist minimal. Aber nicht streng minimal, wenn alle P_{i+1} kounendlich in P_i sind.

Folgerung 1.4.4
Streng minimale Typen sind minimal. □

Definition 1.4.4
$A \subset B$ seien Parametermengen. $q \in \mathrm{S}_1(B)$ zerfällt über A, wenn es eine $L(A)$–Formel $\psi(x, \overline{y})$ gibt und zwei Tupel $\overline{b}$, $\overline{b}' \in B$, die denselben Typ über A haben, sodaß $\psi(x, \overline{b})$ zu q gehört, nicht aber $\psi(x, \overline{b}')$.

Lemma 1.4.5
Sei $p \in \mathrm{S}_1(A)$ minimal, B eine Erweiterung von A und $q(x) \in \mathrm{S}_1(B)$ die eindeutig bestimmte nicht–algebraische Fortsetzung von p. Dann zerfällt *q nicht über A.*

Beweis:
Sei B in dem genügend saturierten Modell M enthalten und sei q die nicht–algebraische Fortsetzung von p auf M. Dann überführt jeder A–Automorphismus von M den Typ q in sich. □

Satz 1.4.6
Sei $\mathrm{tp}(b/A)$ *minimal und* $\mathrm{tp}(b/Aa)$ *nicht–algebraisch. Wenn dann a algebraisch über Ab ist, ist a schon algebraisch über A.*

Beweis:
Wir zeigen, daß $\deg(a/Ab) = \deg(a/A)$: Seien $a_0, \ldots, a_k$ Konjugierte von a über A. Wähle b', das $\mathrm{tp}(b/A)$ realisiert und nicht algebraisch über $Aa_0, \ldots, a_k$ ist. Dann haben alle $a_i b'$ denselben Typ über A wie ab. Also hat a_0 über Ab' und damit auch a über Ab mindestens $k + 1$–viele Konjugierte. □

Sei $\phi(x)$ eine streng minimale Formel ohne Parameter. Wir definieren einen Abschlußoperator $\mathrm{cl} : \mathfrak{P}(\phi(M)) \to \mathfrak{P}(\phi(M))$ durch

$$\mathrm{cl}(A) = \mathrm{acl}^M(A) \cap \phi(M).$$

Folgerung 1.4.7
cl *ist ein Abschlußoperator im Sinn von van der Waerden (oder ein* Matroid*): Für alle $A \subset \phi(M)$ und $a, b \in \phi(M)$ gilt*

1. $A \subset \mathrm{cl}(A)$
2. $\mathrm{cl}(A)$ *ist die Vereinigung aller* $\mathrm{cl}(A')$*, wobei A' alle endlichen Teilmengen von A durchläuft.*
3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.
4. ***Austauscheigenschaft****.*

$$a \in \mathrm{cl}(Ab) \setminus \mathrm{cl}(A) \Rightarrow b \in \mathrm{cl}(Aa)$$

Eine Teilmenge U eines Matroids (X, cl) heißt *unabhängig*, wenn

$$u \notin \mathrm{cl}(U \setminus \{u\})$$

für alle $u \in U$. E ist ein *Erzeugendensystem*, wenn

$$X = \mathrm{cl}(E).$$

Ein unabhängiges Erzeugendensystem ist eine *Basis* von X. Man zeigt leicht:

Satz 1.4.8
Sei (X, cl) *ein Matroid.*

1. *Wenn U eine unabhängige Teilmenge des Erzeugendensystems E ist, gibt es eine Basis B mit*
$$U \subset B \subset E.$$

2. *Alle Basen haben die gleiche Zahl von Elementen, die* Dimension
$$\dim(X)$$
von X.

$\square$

Sei $\phi(x)$ eine streng–minimale Formel ohne Parameter. Die Dimension des oben definierten Matroids $(\phi(M), \mathrm{cl})$ nennt man die ϕ–Dimension

$$\dim_\phi(M)$$

von M.

Wenn $\phi(x)$ über $A_0 \subset M$ definiert ist, nennt

$$\dim_\phi(M_{A_0})$$

die ϕ–Dimension von M über A_0. Wenn klar ist, welche Parametermenge A_0 gemeint ist, schreibt man auch einfach $\dim_\phi(M)$.

Der Abschlußoperator des Matroids $\phi(M_{A_0})$ ist gegeben durch $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{acl}^M(A_0 \cup A) \cap \phi(M)$.

Satz 1.4.9
Sei $\phi(x)$ über A_0 definiert und streng minimal. M und N seien zwei Modelle, die A_0 enthalten. Dann gibt es genau dann eine A_0–elementare Bijektion zwischen $\phi(M)$ und $\phi(N)$, wenn M und N die gleiche ϕ–Dimension über A_0 haben.

Beweis:
Eine A_0–elementare Bijektion zwischen $\phi(M)$ und $\phi(N)$ bildet Basen auf Basen ab. Damit ist die eine Richtung der behaupteten Äquivalenz klar.

Wir zeigen zuerst zwei Hilfsbehauptungen:

Sei $p \in \mathrm{S}(A)$ minimal. Dann haben alle n–Tupel von Realisierungen von p, die über A acl*–unabhängig sind, denselben Typ.*

Beweis: Seien $b_1 \cdots b_n$ und $c_1 \cdots c_n$ zwei solche n-Tupel. Nach Induktionsannahme ist die Abbildung $f : Ab_1 \cdots b_{n-1} \to Ac_1 \cdots c_{n-1}$ elementar. Sei q der Typ von b_n über $Ab_1 \cdots b_{n-1}$ und r der Typ von c_n über $Ac_1 \cdots c_{n-1}$. $f(q)$ und r sind beide nicht–algebraisch und Fortsetzungen von p. Also ist $f(q) = r$ und $b_1 \cdots b_n \mapsto c_1 \cdots c_n$ ist A–elementar.

Jede elementare Bijektion $f : B \to C$ setzt sich zu einer elementaren Bijektion $g : \mathrm{acl}(B) \to \mathrm{acl}(C)$ fort.

Beweis: Sei g eine beliebige elementare Fortsetzung von g auf $\mathrm{acl}(B)$. Die Element von $g(\mathrm{acl}(B))$ sind algebraisch über $g(B) = C$. Also ist $g(\mathrm{acl}(B)) \subset \mathrm{acl}(C)$. Wenn man die Seiten vertauscht, sieht man, daß $g(\mathrm{acl}(B)) = \mathrm{acl}(C)$.

Wenn nun $\phi(M)$ und $\phi(N)$ die gleiche Dimension über A_0 haben, gibt es zwei Basen U und V von $\phi(M)$ bzw. $\phi(N)$. Sei $f : U \to V$ ein Bijektion. Aus der ersten Hilfsbehauptung folgt, daß f A_0–elementar ist. Wegen der zweiten Hilfsbehauptung setzt sich f fort zu einer elementaren Bijektion $g : \mathrm{acl}(AU) \to \mathrm{acl}(AV)$. g bildet $\phi(M)$ A_0–elementar auf $\phi(N)$ ab. $\square$

1.5 Baldwin–Lachlan–Theorie

Wir haben in 1.2.4 gezeigt, daß T ω_1–kategorisch ist, wenn T in einer überabzählbaren Kardinalzahl kategorisch ist. Die Umkehrung und damit Morleys Satz folgt aus

Satz 1.5.1 (Baldwin–Lachlan)
Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, dann ist T genau dann κ–kategorisch, wenn T ω–stabil ist und keine Vaughtschen Paare hat.

Beweis:
Die eine Richtung des Satzes folgt aus 1.1.3 und 1.3.4.

Für die Umkehrung verschaffen wir uns zuerst mit 1.4.2 eine streng–minimale Formel $\phi_0(x, \overline{a}_0)$. Das nächste Lemma zeigt, daß wir annehmen können, daß das Parametertupel $\overline{a}_0$ atomar ist. Mit A_0 sei die Menge der Elemente von $\overline{a}_0$ bezeichnet.

Sei M ein Modell der Mächtigkeit κ. Wir können annehmen, daß $\overline{a}_0 \in M$. Weil T kein Vaughtsches Paar hat, ist M minimale Erweiterung von $A_0 \cup \phi(M, \overline{a}_0)$. $\phi(M, \overline{a}_0)$ hat also auch die Mächtigkeit κ und daher (weil κ überabzählbar ist) auch die Dimension κ. Die Dimension bestimmt aber nach 1.4.9 den elementaren Typ von $\phi(M)$ über A_0 und daher, wegen 1.2.5, den Isomorphietyp von M. Also ist der Isomorphietyp von M durch κ eindeutig bestimmt.
$\square$

Folgerung 1.5.2 (Morley)
κ sei überabzählbar. Dann ist T genau dann ω_1–kategorisch, wenn T κ-kategorisch ist.

Wenn wir nur am Beweis des Satzes von Morley interessiert sind, können wir beim Beweis des letzten Satzes annehmen, daß T ω_1–kategorisch ist. Weil dann wegen 1.1.6 alle elementaren Unterstrukturen von M der Mächtigkeit ω_1 saturiert sind, sind alle überabzählbaren M ω_1–saturiert und wir können annehmen, daß A_0 in M enthalten ist. Man kann also auf die Verwendung von 1.5.3 verzichten.

Lemma 1.5.3
Wenn T ω–stabil ist und keine Vaughtschen Paare hat, gibt es eine streng minimale Formel $\phi_0(x, \overline{a}_0)$ mit atomarem Parametertupel $\overline{a}_0$.

Beweis:
M_0 sei das Primmodell von T. Nach 1.4.2 enthält M_0 eine minimale Menge $\phi_0(M_0)$. Wir zeigen, daß $\phi_0(x)$ streng minimal ist. Wenn nicht, gibt es nach Übung 1.4.2 ein $\psi(x, \overline{y})$, für daß es beliebig große endliche Mengen der Form $\chi(M_0, \overline{a}) = \phi(M_0) \cap \psi(M_0, \overline{a})$, $(\overline{a} \in M_0)$ gibt. Es gibt also für jedes k eine echte elementare Erweiterung $M_0 \prec N$ und ein $\overline{a} \in M_0$, sodaß $\chi(M_0, \overline{a}) = \chi(N, \overline{a})$ mehr als k Elemente hat. Ein Kompaktheitsargument liefert eine echte

elementare Erweiterung $M \prec N$, und ein $\overline{a} \in M$, sodaß $\chi(M, \overline{a}) = \chi(N, \overline{a})$ unendlich ist: ein Vaughtsches Paar. □

Satz 1.5.4

Sei T ω_1–kategorisch, $\phi_0(x)$ eine über $A_0 \subset M$ definierte streng minimale Formel und $M \prec N$ eine elementare Erweiterung von M. Wir schreiben $\dim_{\phi_0}(N/M)$ für die ϕ_0–Dimension von N über M.

1. *$b_1, \ldots, b_n \in \phi_0(N)$ seien unabhängig über M und N prim über $M \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$. Dann ist*

$$\dim_{\phi_0}(N/M) = n.$$

2. $$\dim_{\phi_0}(N) = \dim_{\phi_0}(M) + \dim_{\phi_0}(N/M)$$

Beweis:
Um Schreibarbeit zu sparen, nehmen wir an, daß A_0 leer ist.

1:
Sei c ein beliebiges Element von $\phi_0(N)$. Wir wollen zeigen, daß c algebraisch über $M \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$ ist. Nehmen wir das Gegenteil an. Dann ist $p(x) = \mathrm{tp}(c/M \cup \{b_1, \ldots, b_n\})$ streng (und somit auch schwach) minimal und wird axiomatisiert durch

$$\{\phi_0(x)\} \cup \{\neg\phi_i(x) \mid i \in I\},$$

wobei die ϕ_i alle über $M \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$ definierten algebraischen Formeln durchlaufen. Weil $\phi_0(M)$ unendlich ist, kann daher jede endliche Teilmenge von $p(x)$ von einem Element von M realisiert werden. Daraus folgt, daß $p(x)$ nicht isoliert ist. Alle Elemente der Primerweiterung N sind aber atomar über $M \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$. Widerspruch.

2:
Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $n = \dim_{\phi_0}(N/M)$ und beginnen mit dem Fall $n = 1$:
Sei B eine Basis von $\phi_0(M)$ und $b \in \phi_0(N) \setminus M$. Wir werden zeigen, daß $B \cup \{b\}$ ein Erzeugendensystem (und damit eine Basis) von $\phi_0(N)$ ist. Weil alle Elemente von $\phi_0(M)$ algebraisch über B sind und b nicht algebraisch über B ist, ist $\mathrm{tp}(b/M)$ die einzige Fortsetzung von $\mathrm{tp}(b/B)$ auf M. Es folgt, daß für alle $\overline{m} \in M$

$$\mathrm{tp}(\overline{m}/B) \vdash \mathrm{tp}(\overline{m}/Bb).$$

Weil M Primerweiterung von $\phi_0(M)$ ist, ist M atomar über B. Also ist M auch atomar über Bb.
Sei nun $c \in \phi_0(N)$. Dann ist c algebraisch über Mb und damit auch atomar über Bb. Wie im Beweis von 1. folgt daraus, daß c algebraisch über Bb ist.
Sei nun $n > 1$ und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $\phi_0(N)$ über M. Wir wählen eine elementare Substruktur N_0 von N, die prim über $M \cup \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ ist. Dann ist nach 1. $\dim_{\phi_0}(N_0/M) = n - 1$ und $\dim_{\phi_0}(N/N_0) = 1$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned}\dim_{\phi_0}(N) &= \dim_{\phi_0}(N_0) + \dim_{\phi_0}(N/N_0)\\ &= \dim_{\phi_0}(M) + \dim_{\phi_0}(N_0/M) + \dim_{\phi_0}(N/N_0)\\ &= \dim_{\phi_0}(M) + (n-1) + 1.\end{aligned}$$

□

Wir fixieren für den Rest dieses Abschnitts eine ω_1–kategorische Theorie T.

Folgerung 1.5.5
Die ϕ_0–Dimension von N über M hängt nicht von ϕ_0 ab:

$$\dim(N/M) = \dim_{\phi_0}(N/M)$$

ist die maximale Länge n einer elementaren Kette

$$M = N_0 \precneqq N_1 \precneqq \ldots \precneqq N_n = N$$

zwischen M und N.

Wir fixieren jetzt eine streng minimale Formel $\phi_0(x, \overline{a}_0)$, deren Parameter $\overline{a}_0$ den isolierten Typ $p_0(x)$ hat. Mit $\dim_{\phi_0(x,\overline{a}_0)}(M)$ bezeichnen wir die $\phi(x, \overline{a}_0)$–Dimension von M über $\overline{a}_0$. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, nehmen wir an, daß $\overline{a}_0$ kein Tupel ist, sondern ein einzelnes Element a_0.

Sei M_0 das Primmodell von T. Weil M_0 ω–homogen ist, hängt die Dimension

$$m_0 = \dim_{\phi_0(x,a_0')}(M_0)$$

nicht von der Wahl der Realisierung a_0' von p_0 ab.

Bemerkung 1.5.6
T ist genau dann ω_0–kategorisch, wenn $m_0 = \omega_0$.

Wir nehmen für das Folgende an, daß m_0 endlich ist.

Lemma 1.5.7
Wenn M prim über einer endlichen Menge ist, ist $\dim_{\phi_0(x,a_0)}(M)$ endlich.

Beweis:
Sei M prim über der endlichen Menge C. Wir können annehmen, daß

$$a_0 \in M_0 \prec M.$$

Sei B eine Basis von $\phi_0(M, a_0)$ über M_0. Weil M minimale Primerweiterung von $M_0 \cup B$ ist, ist C atomar über $M_0 \cup B$. Es folgt, daß es ein endliche Teilmenge B_0 von B gibt, sodaß C in einer Primerweiterung N von $M_0 \cup B_0$ enthalten ist. Es genügt zu zeigen, daß $\dim_{\phi_0(x,a_0)}(N)$ endlich ist. (Denn M ist prim über Ca_0). Nach 1.5.4 ist aber

$$\dim_{\phi_0(x,a_0)}(N) = m_0 + |B_0|.$$

□

Definition 1.5.1
Sei N prim über einer endlichen Menge. a_1 und a_2 seien zwei Realisierungen von p_0 in N. Setze

$$\mathrm{diff}(a_1, a_2) = \dim_{\phi_0(x,a_1)}(N) - \dim_{\phi_0(x,a_2)}(N).$$

Wir werden in 1.5.10 zeigen, daß immer $\mathrm{diff}(a_1, a_2) = 0$.

Bemerkung 1.5.8
$\mathrm{diff}(a_1, a_2)$ *hängt nur von* $\mathrm{tp}(a_1 a_2)$ *ab.*

BEWEIS:
Sei $M \prec N$ prim über $a_1 a_2$. Dann ist für $i = 1, 2$

$$\dim_{\phi_0(x,a_i)}(N) = \dim_{\phi_0(x,a_i)}(M) + \dim(N/M).$$

Daraus folgt $\mathrm{diff}(a_1, a_2) = \dim_{\phi_0(x,a_1)}(M) - \dim_{\phi_0(x,a_2)}(M)$. □

Folgerung 1.5.9

$$\mathrm{diff}(a_1, a_3) = \mathrm{diff}(a_1, a_2) + \mathrm{diff}(a_2, a_3)$$

□

Satz 1.5.10
1. $\dim_{\phi_0(x,a_0)}(M)$ *hängt nicht von der Wahl der Realisierung a_0 von p_0 in M ab.*
2. *Für alle $m \geq m_0$ gibt es (genau) ein M mit* $\dim_{\phi_0(x,a_0)}(M) = m$.

BEWEIS:
2:
Wenn $m = m_0 + k$, wähle M prim über $M_0 \cup \{b_1, \ldots, b_k\}$, wobei die $b_i \in \phi(N)$ unabhängig über M_0.

1:
Wir beginnen mit zwei beliebigen Realisierungen a_1 und a_2 von p_0. Wir wählen eine unendliche Folge $a_1, a_2, \ldots$ mit

$$\mathrm{tp}(a_i, a_{i+1}) = \mathrm{tp}(a_1, a_2)$$

für alle i. Sei q_0 eine nicht–forkende Fortsetzung von p_0 auf $\{a_1, a_2, \ldots\}$ (1.6.9) und b eine Realisierung von q_0. Dann gibt es unter den Typen

$$\mathrm{tp}(a_i/b)$$

nur endlich viele verschiedene. (Nämlich höchstens $\mathrm{MD}(p_0)$ viele.). Seien also $i < j$ zwei Indices, für die $\mathrm{tp}(a_i/b) = \mathrm{tp}(a_j/b)$. Dann ist $\mathrm{diff}(a_i, b) = -\mathrm{diff}(b, a_j)$ und es folgt

$$(j - i)\mathrm{diff}(a_1, a_2) = \mathrm{diff}(a_i, a_j) = \mathrm{diff}(a_i, b) + \mathrm{diff}(b, a_j) = 0,$$

woraus $\mathrm{diff}(a_1, a_2) = 0$ folgt. □

Übung 1.5.1
Alle Modelle einer ω_1–kategorischen Theorie sind ω-homogen.

1.6 Morley Rang

In diesem Abschnitt sei T eine vollständige Theorie. Die Sprache darf überabzählbar sein. Wir arbeiten im *Monstermodell* $\mathbb{C}$ von T. $\mathbb{C}$ ist keine Menge sondern eine Klasse und realisiert alle Typen über beliebigen Teilmengen. Man kann $\mathbb{C}$, wenn man mengentheoretisch naiv[3] vorgeht, konstruieren wie ein großes saturiertes Modell. $\mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt, und es gilt *Jede elementare Bijektion zwischen zwei Teilmengen von* $\mathbb{C}$ *setzt sich zu einem Automorphismus von* $\mathbb{C}$ *fort.*

Wir definieren den Morleyrang MR für Formeln $\phi(x)$ mit Parametern im Monstermodell. $\mathrm{MR}(\phi)$ ist -1, eine Ordinalzahl α, oder ∞. -1 ist kleiner und ∞ größer als alle Ordinalzahlen.

Definition 1.6.1

$\mathrm{MR}(\phi) = -1$	*gdw.*	ϕ *inkonsistent ist.*
$\mathrm{MR}(\phi) = 0$	*gdw.*	ϕ *algebraisch ist.*
$\mathrm{MR}(\phi) = \alpha$	*gdw.*	*a)* $\mathrm{MR}(\phi) \neq \beta$ *für alle* $\beta < \alpha$ *b) Es keine unendliche Familie* (ϕ_i) *von Formeln gibt, die* ϕ *implizieren, paarweise inkonsistent sind und für die* $\mathrm{MR}(\phi_i) \neq \beta$ *für alle* $\beta < \alpha$.
$\mathrm{MR}(\phi) = \infty$	*gdw.*	$\mathrm{MR}(\phi)$ *weder* -1 *noch eine Ordinalzahl ist.*

Von einer Formel vom Rang ∞ sagen wir, sie hätten *keinen* Morleyrang.

Bemerkung 1.6.1
Für alle α *ist* $\mathrm{MR}(\phi) \geq (\alpha + 1)$ *genau dann, wenn es eine unendliche Familie* (ϕ_i) *von Formeln gibt, die* ϕ *implizieren, paarweise inkonsistent sind und für die* $\mathrm{MR}(\phi_i) \geq \alpha$.

Der Morleyrang einer Formel $\phi(x, \overline{a})$ hängt nur von $\phi(x, \overline{y})$ und dem Typ von $\overline{a}$ ab. Es folgt, daß alle Morleyränge $\alpha < \infty$ kleiner als $(2^{|T|})^+$ sind.

Lemma 1.6.2

$$\mathrm{MR}(\phi \vee \psi) = \max(\mathrm{MR}(\phi), \mathrm{MR}(\psi))$$

Beweis:
Aus 1.6.1 folgt, daß $\mathrm{MR}(\phi \vee \psi) \geq \max(\mathrm{MR}(\phi), \mathrm{MR}(\psi))$. Für die andere Ungleichung zeigen wir durch Induktion über α, daß

$$\mathrm{MR}(\phi \vee \psi) \geq (\alpha + 1) \Longrightarrow \max(\mathrm{MR}(\phi), \mathrm{MR}(\psi)) \geq (\alpha + 1).$$

[3] In Wahrheit ist die Konstruktion sehr fragwürdig. Man sollte sich davon überzeugen, daß sich $\mathbb{C}$ in allen Beweisen eliminieren läßt.

Sei also $\mathrm{MR}(\phi \vee \psi) \geq (\alpha + 1)$. Dann gibt es eine unendliche Familie (ϕ_i) von Formeln, die $\phi \vee \psi$ implizieren, paarweise inkonsistent sind und für die $\mathrm{MR}(\phi_i) \geq \alpha$. Die Induktionsvoraussetzung impliziert, daß für alle i $\mathrm{MR}(\phi_i \wedge \phi) \geq \alpha$ oder $\mathrm{MR}(\phi_i \wedge \psi) \geq \alpha$. Wenn zum Beispiel der erste Fall für unendlich viele i eintritt, folgt $\mathrm{MR}(\phi) \geq (\alpha + 1)$. $\square$

Aus dem Lemma folgt, daß die Formeln, die einen kleineren Rang als α haben ein Ideal bilden. Wir nennen ϕ und ψ α–äquivalent,

$$\phi \sim_\alpha \psi,$$

wenn die symmetrische Differenz $\phi \bigtriangleup \psi$ einen kleineren Rang als α hat. Es ist jetzt klar, daß α–Äquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Wir nennen eine Formel ϕ vom Rang α α–streng minimal, wenn jede Formel ψ, die ϕ impliziert entweder selbst einen kleineren Rang als α hat oder wenn das Komplement $\phi \wedge \neg\psi$ kleineren Rang als α hat. Anders ausgedrückt: Wenn ψ α–äquivalent zu $\emptyset$ oder zu ϕ ist. ϕ ist genau dann 0–streng minimal, wenn ϕ von einem einzigen Element realisiert wird und 1-streng minimal, wenn ϕ streng minimal ist.

Lemma 1.6.3
Jede Formel ϕ vom Rang α ist Disjunktion einer Familie von paarweise disjunkten α–streng minimale Formeln $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Die ϕ_n, die Komponenten von ϕ, sind bis auf α–Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Beweis:
Formeln vom Rang α, die eine solche Zerlegung nicht zulassen, lassen sich immer zerlegen in eine Formel vom Rang α und eine Formel ohne Zerlegung. Wenn ϕ die gewünschte Zerlegung nicht gestattet, gibt es also Formeln $\phi = \phi_0, \phi_1 \ldots$ und $\psi_1, \ldots$ vom Rang α, sodaß jeweils ϕ_i disjunkte Vereinigung von ϕ_{i+1} und ψ_{i+1} ist. Daraus würde aber folgen, daß ϕ größeren Rang als α hat.

Sei ψ eine α–streng minimale Formel, die ϕ impliziert. ψ zerlegt sich in die Formeln $\psi \wedge \phi_i$, von denen eine, sagen wir $\psi \wedge \phi_{i_0}$, α–äquivalent zu ψ sein muß. Dann sind aber ψ und ϕ_{i_0} α–äquivalent. Daraus folgt die Eindeutigkeit: Die Komponenten von ϕ sind genau die α-streng minimalen Formeln, die ϕ implizieren. $\square$

Definition 1.6.2
Der Morleygrad $\mathrm{MD}(\phi)$ *einer Formel vom Rang α ist die Zahl ihrer α-streng minimalen Komponenten.*

Der Morleygrad von Formeln von Rang -1 oder ∞ ist nicht definiert.

Der Morleygrad einer algebraischen Formel ist die Zahl ihrer Elemente. Streng minimale Formeln sind Formeln vom Morleyrang und Morleygrad 1.

Definiert man $\mathrm{MD}_\alpha(\phi)$ als den Morleygrad für Formeln ϕ von Rang α, als 0 für Formeln von kleinerem und als ∞ für ϕ von größerem Rang, erhält man

Lemma 1.6.4
Wenn ϕ disjunkte Vereinigung von ψ_1 und ψ_2 ist, gilt

$$\mathrm{MD}_\alpha(\phi) = \mathrm{MD}_\alpha(\psi_1) + \mathrm{MD}_\alpha(\psi_2).$$

□

Satz 1.6.5
Es sind äquivalent

a) *Es gibt keinen binären Baum von konsistenten Formeln wie im Beweis von Satz 1.1.4.*

b) *Jede Formel hat einen Morleyrang.*

Beweis:
a⇒b:
Jede Formel ohne Morleyrang zerlegt sich in zwei Formeln ohne Morley Rang.
b⇒a:
Sei $(\phi_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ ein binärer Baum. Wir wählen eine Formel ϕ_s mit minimalem Rang α und (unter den Formeln mit Rang α) mit minimalem Grad. Dann haben ϕ_{s0} und ϕ_{s1} beide Rang α und daher kleineren Grad als ϕ. Widerspruch. □

Wenn die Bedingungen des letzten Satzes zutreffen, nennt man T *total transzendent*.

Folgerung 1.6.6
Wenn T abzählbar ist, ist T genau dann total transzendent, wenn T ω–stabil ist.

Beweis:
Siehe Beweis von 1.1.4. □

Definition 1.6.3
Der Morleyrang $\mathrm{MR}(p)$ eines Typs p ist der kleinste Rang einer Formel aus p. Wenn $\mathrm{MR}(p)$ eine Ordinalzahl α ist, ist der Morleygrad $\mathrm{MD}(p)$ von p der kleinste Grad einer Formel aus p vom Rang α.

Algebraische Typen sind Typen vom Morleyrang 0. Für sie gilt

$$\mathrm{MD}(p) = \deg(p).$$

Streng minimale Typen sind Typen vom Morleyrang und Morleygrad 1;

Sei α der Rang von $p \in \mathrm{S}(A)$ und d der Morleygrad. Dann gibt es ein $\phi \in p$ vom Rang α und Grad d. ϕ ist dadurch bis α–Äquivalenz eindeutig bestimmt. Für alle $\psi \in p$ ist nämlich $\mathrm{MR}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha$. Umgekehrt gehören alle solche ψ zu p. Das zeigt, daß p durch ϕ eindeutig bestimmt ist:

$$p = \{\psi(x) \mid \psi\ L(A)\text{–Formel},\ \mathrm{MR}(\phi \wedge \neg\psi) < \alpha\}\,. \tag{1.1}$$

α–äquivalente Formeln bestimmen den gleichen Typ.

Eine $L(A)$–Formel ϕ gehört auf diese Weise genau dann zu einem Typ von Rang α, wenn ϕ α–minimal über A ist. Das heißt, daß ϕ Rang α hat und sich nicht in zwei $L(A)$–Formeln von Rang α zerlegen läßt.

Lemma 1.6.7
Sei ϕ eine konsistente $L(A)$–Formel.

1. $$\mathrm{MR}(\phi) = \max\{\mathrm{MR}(p) \mid \phi \in p \in \mathrm{S}(A)\}$$

2. *Sei* $\mathrm{MR}(\phi) = \alpha$. *Dann ist*

$$\mathrm{MD}(\phi) = \sum\big(\mathrm{MD}(p) \bigm| \phi \in p \in \mathrm{S}(A),\ \mathrm{MR}(p) = \alpha\big).$$

Beweis:
1:
Wenn $\mathrm{MR}(\phi) = \infty$, ist $\{\phi\} \cup \{\neg\psi \mid \psi\ L(A)\text{–Formel},\ \mathrm{MR}(\psi) < \infty\}$ konsistent. Ein Typ über A, der diese Formelmenge enthält, hat den Rang ∞.
Wenn $\mathrm{MR}(\phi) = \alpha$, findet man eine Zerlegung von ϕ in $L(A)$–Formeln $\phi_1, \ldots, \phi_k$, die α–minimal über A sind. Die ϕ_i bestimmen (wegen (1.1)) Typen p_i vom Rang α.

2:
Die p_i sind alle Typen vom Rang α, die ϕ enthalten. Außerdem ist

$$\mathrm{MD}(\phi_i) = \mathrm{MD}(p_i).$$

□

Definition 1.6.4
Eine Erweiterung q eines Types $p \in \mathrm{S}(A)$ auf eine Obermenge B von A heißt forkende Erweiterung, wenn $\mathrm{MR}(q) < \mathrm{MR}(p)$. Wir sagen auch: $q \in \mathrm{S}(B)$ forkt über A.

Folgerung 1.6.8
Wenn $p \in \mathrm{S}(A)$ Morleyrang hat und $A \subset B$, gilt

$$\mathrm{MD}(p) = \sum\big(\mathrm{MD}(q) \bigm| q \in \mathrm{S}(B) \textit{ nicht–forkende Erweiterung von } p\big)$$

□

Folgerung 1.6.9
Ein Typ $p \in \mathrm{S}(A)$ hat mindestens eine und höchstens $\mathrm{MD}(p)$–viele nichtforkende Erweiterungen auf jede Obermenge. □

Übung 1.6.1
Wir haben Morleyrang nur für Formeln und Typen in einer Variablen eingeführt. Natürlich verallgemeinert sich die Definition für Formeln und Typen in einer festen Zahl von Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Man zeige:

1. Wenn T ω–stabil ist, gibt es über jeder abzählbaren Parametermenge nur abzählbar viele n–Typen.
2. Wenn T total transzendent ist, hat jede Formel in n Variablen einen Morleyrang.

Übung 1.6.2
Sei T total transzendent. Dann haben Typen über ω–saturierten Modellen Morleygrad 1.

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß die Voraussetzung der ω–Saturiertheit überflüssig ist (2.1.3(2)).

Kapitel 2

Stabile Theorien

2.1 Stabile Theorien

T sei eine vollständige Theorie. Die Sprache kann überabzählbar sein.

Definition 2.1.1

1. *Eine Formel $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ hat die Ordnungseigenschaft, wenn es (in einem geeigneten Modell) Elemente $\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots$ und $\overline{b}_0, \overline{b}_1, \ldots$ gibt sodaß für alle $i, j \in \omega$*

$$\models \phi(\overline{a}_i, \overline{b}_j) \Longleftrightarrow i < j$$

2. *T heißt stabil, wenn keine L–Formel die Ordnungseigenschaft hat.*

Man überlegt leicht, daß mit $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ auch $\phi(\overline{y}, \overline{x})$ die Ordnungseigenschaft hat. Wenn T stabil ist, können auch Formeln mit Parametern nicht die Ordnungseigenschaft haben.

Übung 2.1.1
T ist genau dann unstabil, wenn es eine L–Formel $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ gibt und Elemente $\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots$, die von ψ geordnet werden, für die also

$$\models \psi(\overline{a}_i, \overline{a}_j) \Longleftrightarrow i < j.$$

ψ darf auch Parameter enthalten.

Total transzendente Theorien sind stabil. Denn wenn $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ die Ordnungseigenschaft hat, findet man auch $\overline{a}_i$ und $\overline{b}_i$, die nach einer beliebigen linearen Ordnung I indiziert sind. Wir wählen $I = \mathbb{Q}$, und zerlegen $\mathbb{Q}$ in einen binären Baum von Intervallen (l_s, r_s), $s \in 2^{<\omega}$, sodaß immer $r_{s0} = l_{s1}$. Die Formeln $\neg\phi(\overline{x}, \overline{b}_{l_s}) \wedge \phi(\overline{x}, \overline{b}_{r_s})$ bilden dann einen binären Baum von konsistenten Formeln.

Eine Typ $p \in \mathrm{S}_n(B)$ heißt definierbar (über C), wenn es für alle L–Formeln $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ eine $L(B)$ (bzw. $L(C)$) Formel $\mathrm{d}_p\overline{x}\phi(\overline{x}, \overline{y})$ gibt, sodaß für alle $\overline{b} \in B$

$$\phi(\overline{x}, \overline{b}) \in p \Longleftrightarrow \models \mathrm{d}_p\overline{x}\phi(\overline{x}, \overline{b}). \tag{2.1}$$

Satz 2.1.1
T ist genau dann stabil, wenn alle Typen über Modellen definierbar sind.

Beweis:
Sei T stabil, $p \in \mathrm{S}_n(M)$ und $\phi(x,y)$ eine L–Formel. (Wir betrachten hier, um die Notation zu vereinfachen, Tupel der Länge 1.) Ich behaupte, daß wir für $\mathrm{d}_p x\phi(x,y)$ eine Boolesche Kombination von Formeln der Form $\phi(a,y)$, $(a \in M)$ verwenden können. Wir nehmen das Gegenteil an und zeigen daß ϕ die Ordnungseigenschaft hat. Dazu konstruieren wir drei Folgen $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0^i, b_1^i, \ldots$, $(i = 1,2)$, von Elementen von M. Seien $a_0, \ldots, a_{n-1}$ und $b_0^i, \ldots, b_{n-1}^i$, $(i = 1,2)$, konstruiert. Weil der ϕ–Teil von p nicht in der angegebenen Weise über $a_0, \ldots, a_{n-1}$ definierbar ist, gibt es zwei Elemente b_n^1 und b_n^2 von M, für die

$$M \models \phi(a_j, b_n^1) \iff M \models \phi(a_j, b_n^2)$$

für alle $j < n$, andererseits aber $\phi(x, b_n^1) \in p$ und $\phi(x, b_n^2) \notin p$. Dann realisieren wir den ϕ–Teil von p eingeschränkt auf $\{b_0^1, \ldots, b_n^1\} \cup \{b_0^2, \ldots, b_n^2\}$ durch a_n. Es gilt also, wenn die früheren b_j^i auch in dieser Weise gewählt waren,

$$M \models \phi(a_n, b_j^1) \quad \text{und} \quad M \not\models \phi(a_n, b_j^2)$$

für alle $j \leq n$.
Wenn die drei Folgen konstruiert sind, wenden wir den Satz von Ramsey an und er halten eine unendliche Menge I von Indices sodaß entweder $M \models \phi(a_j, b_n^1)$ für alle $j < n$ aus I oder $M \not\models \phi(a_j, b_n^1)$. Im ersten Fall haben wir

$$M \models \phi(a_j, b_n^2) \iff j < n$$

für alle $j, n \in I$, im zweiten Fall

$$M \models \phi(a_j, b_n^1) \iff j \geq n.$$

In beiden Fällen folgt, daß ϕ die Ordnungseigenschaft hat.

Seien nun alle Typen p über Modellen M definierbar und $\phi(x,y)$ eine Formel. Die ϕ–Anteile

$$p_\phi = \{(\neg)\phi(x,b) \mid (\neg)\phi(x,b) \in M\}$$

bilden die Menge

$$\mathrm{S}_\phi(M)$$

aller ϕ–Typen über M. Aus der Definierbarkeit der p folgt

$$|S_\phi(M)| \leq |M| + |T|.$$

Sei λ eine Kardinalzahl. Es gibt immer eine lineare Ordnung I mit mehr als λ vielen Elementen, die eine dichte Teilmenge I_0 der Mächtigkeit λ hat (Übung 2.1.2).
Wenn nun ϕ die Ordnungseigenschaft hätte, gäbe es Elemente a_i, b_i mit $\models \phi(a_i, b_j) \iff i < j$ für alle $i, j \in I$. Die ϕ–Typen der a_i über $B = \{b_j \mid j \in I_0\}$ sind dann alle verschieden und $\mathrm{S}_\phi(B)$ hätte mehr als λ Elemente. Wenn $\lambda \geq |T|$, können wir B in einem Modell M der Mächtigkeit λ finden und wir hätten einen Widerspruch. □

Übung 2.1.2
Sei λ eine Kardinalzahl und μ minimal mit $2^\mu > \lambda$. Dann hat der Baum $I = {}^{\leq\mu}2$ mehr als λ viele Elemente und $I_0 = {}^{<\mu}2$ höchstens die Mächtigkeit λ. Wenn wir I in geeigneter Weise linear ordnen, ist I_0 dicht in I.

Übung 2.1.3
Es sind äquivalent:

a) T ist stabil

b) T ist λ–stabil für ein λ.

c) T ist λ–stabil für alle λ mit $\lambda^{|T|} = \lambda$

d) Für alle ϕ und alle unendlichen A ist $|\mathrm{S}_\phi(A)| \leq |A|$.

Lemma 2.1.2
Ein definierbarer Typ $p \in \mathrm{S}(M)$ hat genau eine über M definierbare Fortsetzung q auf jede Obermenge B.

Beweis:
Daß die $\mathrm{d}_p\overline{x}\phi(\overline{x},\overline{y})$ einen Typ definieren, läßt sich in M ausdrücken und gilt daher auch in jeder elementaren Erweiterung. Das beweist die Existenz. Anderseits stimmen $\mathrm{d}_q\overline{x}\phi(\overline{x},\overline{y})$ und $\mathrm{d}_p\overline{x}\phi(\overline{x},\overline{y})$ in M und daher auch in allen elementaren Erweiterungen überein, was die Eindeutigkeit beweist. □

Sei $p \in \mathrm{S}(B)$ definiert durch die $L(B)$–Formeln $(\mathrm{d}_p x\phi)$. Wir nennen die Definition *gut*, wenn sie in einem Modell $N \supset B$ (oder, was äquivalent ist, in allen $N \supset B$) einen Typ definiert. Definitionen über einem Modell M sind immer gut und (bis auf Äquivalenz der Formeln) eindeutig durch p bestimmt. Wir werden später sehen (2.2.5), daß in stabilen Theorien gute Definitionen immer eindeutig sind.

Definition 2.1.2
$p \in \mathrm{S}(A)$ heißt stationär, wenn p eine gute Definition $(\mathrm{d}_p x\phi)$ hat. Eine Erweiterung q von p, die durch $(\mathrm{d}_p x\phi)$ definiert wird, heißt nicht–forkende Erweiterung. Eine andere Sprechweise ist: q forkt nicht über A.

Sei p ein Typ mit Morleyrang. Wir werden sehen, daß (wenn T stabil ist) p genau dann stationär ist, wenn $\mathrm{MD}(p) = 1$. Außerdem wird sich zeigen, daß unsere neue Definition von nicht–forkender Erweiterung mit der auf Seite 26 gegebenen übereinstimmt: Die nicht–forkenden Erweiterungen von p sind genau die Erweiterungen mit gleichem Morleyrang.

Zwei Spezialfälle können wir jetzt schon beweisen:

Bemerkung 2.1.3
Sei T stabil, $p \in \mathrm{S}(A)$ ein Typ mit Morleyrang und B eine Obermenge von A. Dann gilt:

1. *Wenn $p \in \mathrm{S}(A)$ Morleygrad 1 hat, ist p stationär und die Erweiterung von p auf B vom gleichen Morleyrang forkt nicht.*

2. *Wenn A ein Modell ist, hat p Morleygrad 1. Die eindeutig bestimmte nicht–forkende Erweiterung von p auf B ist gleichzeitig die eindeutig bestimmte Erweiterung mit gleichem Morleyrang.*

Beweis:
Wir können annehmen, daß $B = N$ ein großes saturiertes Modell ist, zum Beispiel das Monstermodell. (Wir brauchen nur, daß Tupel aus N, die den gleichen Typ über A haben, in N über A konjugiert sind.) Sei $q \in \mathrm{S}(N)$ eine Erweiterung von p von gleichem Morleyrang. Sei $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ eine L–Formel. Dann ist $X = \{\overline{b} \in N \mid \phi(\overline{x}, \overline{b}) \in q\}$ eine definierbare Teilmenge von N (genauer gesagt von N^n).
Wenn $\mathrm{MD}(p) = 1$, ist X unter allen A–Automorphismen von N invariant, also über A definierbar. Das beweist 1.
Sonst hat X nur endlich viele Konjugierte $X = X_1, \ldots, X_k$ über $A = M$, nämlich höchstens $\mathrm{MD}(p)$ viele. Die Äquivalenzrelation

$$E(\overline{a}, \overline{a}') \Longleftrightarrow (\overline{a} \in X_i \Leftrightarrow \overline{a}' \in X_i \quad \text{für alle } i)$$

ist definierbar. Weil E invariant unter allen M–Automorphismen von N ist, ist E über M definierbar. Weil E nur endlich viele Klassen hat (E ist eine *endliche* Äquivalenzrelation) und M ein Modell ist, schneiden alle E–Klassen M und sind daher selbst M definierbar. X ist als Vereinigung von E–Klassen ebenfalls M definierbar. Es folgt, daß q definierbar ist. Wenn p auf allen Obermengen von M nur eine Erweiterung vom gleichen Morleyrang hat, muß p Morleygrad 1 haben.
□

Satz 2.1.4 (Forkingsymmetrie)
Sei T stabil, und die Typen von $\overline{a}$ und $\overline{b}$ über A stationär. Wenn $\mathrm{tp}(\overline{a}/A\overline{b})$ nicht über A forkt, forkt auch $\mathrm{tp}(\overline{b}/A\overline{a})$ nicht über A.

Beweis:
Sei N eine genügend saturierte Erweiterung von Aab. (Wir verwenden Elemente statt Tupel.) Sei p eine Erweiterung von $\mathrm{tp}(a/Ab)$ auf N, die über A nicht forkt und q eine beliebige nicht–forkende Erweiterung von $\mathrm{tp}(b/A)$ auf N. Wir werden zeigen, daß q eine Fortsetzung von $\mathrm{tp}(b/Aa)$ ist.

Wir definieren rekursiv zwei Folgen $a_0, a_1, \ldots$ und $b_0, b_1, \ldots$ von Elementen von N: Wenn $a_0, \ldots, a_{n-1}$ und $b_0, \ldots, b_{n-1}$ definiert sind, wählen wir für b_n eine Realisierung von $q \restriction Aa_0, \ldots, a_{n-1}$ und für a_n eine Realisierung von $p \restriction Ab_0, \ldots, b_n$. Weil a eine Realisierung von $p \restriction Ab$ ist, können wir annehmen, daß $a_0 = a$ und $b_0 = b$.
Sei nun $N \models \phi(a, b)$ für eine $L(A)$–Formel $\phi(x, y)$. Dann ist $N \models \phi(a_i, b_j)$ für alle $i \geq j$. Es können zwei Fälle eintreten: Wenn $\phi(a_0, y) \notin q(y)$, ist $N \models \neg\phi(a_i, b_j)$ für alle $i < j$ oder, wenn $\phi(a_0, y) \in q(y)$, gilt $N \models \phi(a_i, b_j)$ für alle $i < j$. Der erste Fall kann nicht eintreten, weil sonst ϕ die Ordnungseigenschaft hätte. Es folgt $\phi(a, y) \in q(y)$. Damit haben wir gezeigt, daß b eine Realisierung von $q \restriction Aa$ ist. □

Wir haben nicht nur bewiesen, daß $\mathrm{tp}(\overline{b}/A\overline{a})$ nicht über A forkt, sondern daß $\overline{b}$ *jede* nicht–forkende Erweiterung von $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ auf $A\overline{a}$ realisiert. Daraus folgt leicht, daß ein stationärer Typ $q \in \mathrm{S}(A)$ genau eine nicht–forkende Fortsetzung auf A' hat, solange der Typ aller Tupel $\overline{a}$ aus A' stationär über A ist.

Übung 2.1.4
Sei $q \in \mathrm{S}(B)$ eine Fortsetzung von $p \in \mathrm{S}(M)$. q heißt *Erbe* von p, wenn es für jede $L(M)$–Formel $\phi(x, \overline{y})$ und alle $\overline{b}$ mit $\phi(x, \overline{b}) \in q$ ein $\overline{m} \in M$ gibt, für das $\phi(x, \overline{m}) \in p$. Man zeige

1. Jedes $p \in \mathrm{S}(M)$ hat einen Erben $q \in \mathrm{S}(B)$.
2. Wenn T stabil ist, gibt es nur einen Erben: die nicht–forkende Erweiterung von p auf B.

2.2 Theorien mit Imaginärenelimination

Definition 2.2.1
T eliminiert Imaginäre, wenn jede 0–definierbare Äquivalenzrelation auf M^n Faserung einer 0–definierbaren Funktion $M^n \to M^m$ ist.

Die Bezeichnung wird in der Übung 2.4.1 erklärt.

Wir nehmen in diesem Abschnitt an, daß T Imaginäre eliminiert. Im Abschnitt 2.4 werden wir sehen, daß die Annahme harmlos ist. Alle Sätze, die wir beweisen werden gelten für beliebige Theorien.

<u>Übung</u> 2.2.1

1. Wenn T Imaginäre eliminiert, gibt es
   a) zu jeder definierbaren Teilmenge X von M^k ein Tupel c mit
      i) X ist definierbar über c.
      ii) c ist in der $L \cup \{P\}$–Struktur (M, X) 0–definierbar.

      c heißt *kanonischer Parameter* von X.
   b) und mindestens zwei 0–definierbare Elemente.

   Wenn M genügend saturiert ist, gilt auch die Umkehrung.
2. Der kanonische Parameter c von X ist (falls er existiert) bis auf Interdefinierbarkeit[1] eindeutig bestimmt: Es ist $c \in \mathrm{dcl}(d)$ gdw. X über d definierbar ist.

Folgerung 2.2.1
Sei $A \subset M$ und M genügend saturiert. Dann sind äquivalent:

a) X ist über $\mathrm{acl}(A)$ definierbar.

b) X hat nur endlich viele Konjugierte über A.

c) X besteht aus Klassen einer A–definierbaren endlichen Äquivalenzrelation.

Beweis:
Wenn $X = \phi(M, \overline{a})$, wobei $\overline{a} \in \mathrm{acl}(A)$, hat X höchstens $\deg(\overline{a}/A)$ viele Konjugierte über A. Wenn X nur endlich viele Konjugierte X_i über A hat, zeigt der Beweis von 2.1.3(2), daß X aus Klassen einer A–definierbaren endlichen Äquivalenzrelation E besteht. Umgekehrt haben die Klassen einer A–definierbaren endlichen Äquivalenzrelation nur endlich viele Konjugierte.
Schließlich nehmen wir an, daß $X = \phi(M, \overline{a})$ nur endlich viele Konjugierte über A hat. Sei F die 0–definierbare Äquivalenzrelation

$$\overline{a} F \overline{a}' \Leftrightarrow \phi(M, \overline{a}) = \phi(M, \overline{a}'),$$

und sei F die Faserung der 0–definierbaren Funktion $f : M^n \to M^m$. Dann hat X genausoviel Konjugierte über A wie das Tupel $\overline{b} := f(\overline{a})$. $\overline{b}$ gehört also zu $\mathrm{acl}(A)$ und X ist definierbar durch

$$\exists y \, (\phi(x, \overline{y}) \wedge f(\overline{y}) = \overline{b}).$$

[1] a und b sind *interdefinierbar* , wenn $a \in \mathrm{dcl}(b)$ und $b \in \mathrm{dcl}(a)$.

□

Bemerkung 2.2.2
Sei T stabil und $p \in \mathrm{S}(A)$ ein Typ mit Morleyrang.

1. *Wenn A algebraisch abgeschlossen ist, ist p stationär.*
2. *Wenn T total transzendent ist, ist p genau dann stationär, wenn p Morleygrad 1 hat. p hat dann genau eine nicht–forkende Fortsetzung auf jede Obermenge.*

Beweis:
Für algebraisch abgeschlossene A zeigt der Beweis von 2.1.3 (2), daß eine Erweiterung von p mit gleichem Morleyrang nicht–forkende Erweiterung ist. Das zeigt 1.

Sei nun T total transzendent. Wenn A algebraisch abgeschlossen ist, ist der Typ jedes Tupels $\overline{a}$ über A stationär. Nach der Bemerkung nach Satz 2.1.4 gibt es dann nur eine nicht–forkende Erweiterung von p. Also hat p den Morleygrad 1.
Wir zeigen jetzt, daß p Morleygrad 1 hat, wenn p stationär ist: Weil alle Erweiterungen von p auf $\mathrm{acl}(A)$ Morleygrad 1 haben, ist der Morleygrad von p die Zahl der Fortsetzungen von p auf $\mathrm{acl}(A)$. Wenn p stationär ist, gibt es eine Fortsetzung, die über A definierbar ist. Der nächsten Übung entnehmen wir, daß alle Fortsetzungen von p auf $\mathrm{acl}(A)$ über A konjugiert sind. Alle Fortsetzungen haben also die gleiche Definition, es gibt also nur eine Fortsetzung auf $\mathrm{acl}(A)$. Daraus folgt, daß der Morleygrad 1 ist und außerdem, daß es nur eine nicht–forkende Erweiterung gibt. □

Übung 2.2.2
Alle Erweiterungen eines Types $p \in \mathrm{S}(A)$ auf $\mathrm{acl}(A)$ sind über A konjugiert (T beliebig).

Übung 2.2.3
Ein algebraischer Typ über A hat genau dann eine gute Definition über $B \subset A$, wenn er in $\mathrm{dcl}(B)$ realisiert wird.

Satz 2.2.3
Wenn T stabil ist, ist jeder Typ p über einer algebraisch abgeschlossenen Menge A stationär.

Beweis:
Um die Notation zu vereinfachen beschränken wir uns auf 1–Typen. Sei Δ eine endliche Menge von L–Formeln $\delta(x, \overline{y})$. Boolesche Kombinationen von Formeln der Form $\delta(x, \overline{a})$, ($\delta \in \Delta$) nennen wir Δ–Formeln. Wir definieren den Δ–Rang R_Δ einer Formel $\phi(x)$:

$\mathrm{R}_\Delta(\phi) = -1$	gdw.	ϕ inkonsistent ist.
$\mathrm{R}_\Delta(\phi) = \alpha$	gdw.	a) $\mathrm{R}_\Delta(\phi) \neq \beta$ für alle $\beta < \alpha$ b) Es keine unendliche Familie (ψ_i) von Δ–Formeln gibt, die paarweise inkonsistent sind und für die $\mathrm{R}_\Delta(\phi \wedge \psi) \neq \beta$ für alle $\beta < \alpha$.
$\mathrm{R}_\Delta(\phi) = \infty$	gdw.	$\mathrm{R}_\Delta(\phi)$ weder -1 noch eine Ordinalzahl ist.

Behauptung Jede Formel $\phi(x)$ hat einen Δ–Rang.
Sonst gäbe es einen binären Baum $(\psi_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ aus Δ–Formeln, für den die $\phi \wedge \psi_s$ keinen Δ–Rang haben. Damit könnte man, über einer abzählbaren Parametermenge A, 2^ω–viele Δ–Typen konstruieren. (Für $p \in \mathrm{S}(A)$ ist $p_\Delta = \{\psi \in p \mid \psi\ \Delta\text{–Formel}\ \}$ ein Δ–Typ.) Weil Δ endlich ist, wäre dann für ein $\delta \in \Delta$ auch $\mathrm{S}_\delta(A)$ überabzählbar, was der Stabilität von T widerspricht.

Der Δ–Rang eines Typs $p \in \mathrm{S}(A)$ ist der kleinste Δ–Rang α einer Formel ϕ_p aus p.

Sei M ein Modell, das A enthält. Dann ist die Menge

$$p \cup \{\neg\psi(x) \mid \psi\ L(M)\text{–Formel mit } \mathrm{R}_\Delta(\psi) < \alpha\}$$

endlich erfüllbar und daher in einem $q \in \mathrm{S}(M)$ enthalten, das wieder Δ–Rang α haben muß. Bei allen Fortsetzungen $q \in \mathrm{S}(M)$ von p, die Δ–Rang α haben, können nur endlich viele Δ–Anteile q_Δ vorkommen. (Sonst könnte man ϕ_p mit Δ–Formeln aus $L(M)$ in unendlich viele Formeln vom Δ–Rang α zerlegen.) Es folgt, daß für jedes q und jedes $\delta \in \Delta$ die definierende Formel $\mathrm{d}_q x\delta$ über $A = \mathrm{acl}(A)$ definierbar ist.

Wenn man sich den Beweis von 2.1.4 ansieht, erkennt man, daß folgendes bewiesen wurde: Sei $\delta(\overline{x},\overline{y})$ eine L–Formel und $\tilde{\delta}(\overline{x},\overline{y}) = \delta(\overline{y},\overline{x})$. Sei M ein genügend saturiertes Modell, das A enthält. p und q seien zwei Typen aus $\mathrm{S}(M)$, für die $\mathrm{d}_p\overline{x}\delta$ und $\mathrm{d}_q\overline{x}\tilde{\delta}$ über A definierbar sind. Wenn dann $\overline{a} \in M$ den Typ $p \restriction A\overline{b}$ realisiert und $\overline{b} \in M$ den Typ $q \restriction A$, dann realisiert $\overline{b}$ den Typ $q_{\tilde{\delta}} \restriction A\overline{a}$.

Daraus folgt wieder, daß die Δ–Anteile der Fortsetzungen q von p mit gleichem Δ–Rang eindeutig bestimmt sind. Es resultiert die Existenz einer Fortsetzung q von p mit

$$\mathrm{R}_\Delta(q) = \mathrm{R}_\Delta(p)$$

für alle Δ. q ist die gesuchte Fortsetzung von p auf M, die über A definierbar ist. □

Bemerkung 2.2.4
Wenn T stabil ist, haben stationäre Typen genau eine nicht–forkende Fortsetzung auf jede Obermenge.

Beweis:
Siehe Beweis von 2.2.2. □

Definition 2.2.2
Ein Typ $q \in \mathrm{S}(B)$ forkt nicht über $A \subset B$, wenn eine (jede) Fortsetzung von q auf $B \cup \mathrm{acl}(A)$ nicht über $\mathrm{acl}(A)$ forkt. q heißt dann nicht–forkende Erweiterung von $q \restriction A$.

Wir überlegen uns, daß diese Definition mit dem Begriff der nicht–forkenden Erweiterung stationärer Typen (Definition 2.1.2) übereinstimmt: Sei also $p \in \mathrm{S}(A)$ stationär und $q \in \mathrm{S}(B)$ die nicht–forkende Fortsetzung im alten Sinn. Wir setzen q fort zu einem Typ $\tilde{q} \in \mathrm{S}(B \cup \mathrm{acl}(A))$, der ebenfalls nicht über A forkt. Dann forkt $\tilde{q}$ erst recht nicht über $\mathrm{acl}(A)$. Also forkt q nicht im neuen Sinn über A. Für die Umkehrung überlegen wir zuerst, daß wegen der Konjugiertheit aller Fortsetzungen von p auf $\mathrm{acl}(A)$ alle Fortsetzungen nicht–forkende Erweiterungen sind, es also nur eine Fortsetzung gibt. Wenn also umgekehrt eine Erweiterung $\tilde{q}' \in \mathrm{S}(B \cup \mathrm{acl}(A))$ nicht über $\mathrm{acl}(A)$ forkt, stimmt $\tilde{q}'$ mit $\tilde{q}$ auf $\mathrm{acl}(A)$ überein. Also ist $\tilde{q} = \tilde{q}'$.

Folgerung 2.2.5
Sei T stabil. Dann ist ein Typ genau dann stationär, wenn er nur eine nicht–forkende Erweiterung auf jede Obermenge hat.

Beweis:
Wenn $p \in \mathrm{S}(A)$ nur eine Fortsetzung q auf $\mathrm{acl}(A)$ hat, ist die gute Definition von q unter allen A–Automorphismen invariant, also auch eine gute Definition von p. □

Bemerkung 2.2.6
Sei T stabil, $p \in \mathrm{S}(A)$ ein Typ mit Morleyrang und q eine Erweiterung von p auf eine Obermenge von A. Dann ist q genau dann nicht–forkende Erweiterung, wenn $\mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(q)$.

Beweis:
Wegen der Konjugiertheit der Fortsetzungen ändert ein Typ seinen Morleyrang nicht, wenn man ihn auf den algebraischen Abschluß des Definitionsbereichs fortsetzt. Jetzt folgt die Behauptung leicht aus früherem. □

2.3 Eigenschaften des Forking

In diesem Abschnitt sei T stabil. Wir nehmen wieder an, daß T Imaginärenelimination hat.

Satz 2.3.1 (Existenz)
Jeder Typ $p \in \mathrm{S}(A)$ hat eine nicht–forkende Erweiterung auf jede Obermenge von A.

Beweis:
Sei B eine Erweiterung von A. Sei p' eine Fortsetzung von p auf $\mathrm{acl}(A)$. Weil p' stationär ist, hat p' eine nicht–forkende Erweiterung q' auf $B \cup \mathrm{acl}(A)$. $q \upharpoonright B$ ist nicht–forkende Erweiterung von p auf B. $\square$

Satz 2.3.2 (Eindeutigkeit)
Wenn A algebraisch abgeschlossen ist, hat jeder Typ über A genau eine nicht–forkende Erweiterung auf jede Obermenge von B. $\square$

Satz 2.3.3 (Konjugiertheit)
Wenn $A \subset M$ und M genügend saturiert ist, sind alle nicht–forkenden Erweiterungen von $p \in \mathrm{S}(A)$ auf M über A konjugiert,

Beweis:
Seien q_1 und q_2 zwei nicht–forkende Erweiterungen von p auf M. Ein A–Automorphismus von M, der $q_1 \upharpoonright \mathrm{acl}(A)$ in $q_2 \upharpoonright \mathrm{acl}(A)$ überführt, überführt auch q_1 in q_2. $\square$

Satz 2.3.4 (Algebraischer Abschluß)

1. *$p \in \mathrm{S}(\mathrm{acl}(A))$ forkt nicht über A.*
2. *Wenn $\mathrm{tp}(a/Aa)$ nicht über A forkt, ist a algebraisch über A.*

Beweis:
1.: Klar.
2.: Wenn $\mathrm{tp}(a/Aa)$ nicht über A forkt, forkt $\mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}(A)a)$ nicht über $\mathrm{acl}(A)$. Aus der Übung 2.2.3 folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2.3.5 (Transitivität und Monotonie)
Sei $A \subset B \subset C$ und $q \in \mathrm{S}(C)$. Dann forkt q genau dann nicht über A, wenn q nicht über B und $q \upharpoonright B$ nicht über A forkt.

Beweis:
Die Behauptung ist leicht zu sehen, wenn $p \upharpoonright A$ stationär ist. Andernfalls sei q' eine Fortsetzung von q auf CA', wobei $A' = \mathrm{acl}(A)$. Dann forkt q genau dann nicht über A, wenn q' nicht über A' forkt. Also genau dann wenn q' nicht über BA' forkt und $q' \upharpoonright BA'$ nicht über A'. Die zweite Bedingung bedeutet, daß $q \upharpoonright B$ nicht über A forkt. Die erste Bedingung bedeutet für eine Fortsetzung q'' von q'

auf $C\mathrm{acl}(B)$, daß q'' nicht über $\mathrm{acl}(B) = \mathrm{acl}(BA')$ forkt, das heißt, daß q nicht über B forkt. □

Satz 2.3.6 (Stetigkeit)

1. *Wenn $p \in \mathrm{S}(A)$, gibt es ein $A_0 \subset A$, über dem p nicht forkt und das höchstens die Mächtigkeit $|T|$ hat.*

2. *Wenn $p \in \mathrm{S}(B)$ über A forkt, gibt es eine endliche Teilmenge $B_0 \subset B$, sodaß $p \restriction AB_0$ über A forkt.*

Beweis:
1.: Sei p' eine Fortsetzung von p auf $\mathrm{acl}(A)$. p' hat eine gute Definition, die schon über einem $A'_0 \subset \mathrm{acl}(A)$ definiert ist, das höchstens die Mächtigkeit $|T|$ hat. Wähle $A_0 \subset A$, sodaß $A'_0 \subset \mathrm{acl}(A_0)$.

2.: Sei q eine Fortsetzung von $p \restriction A$ auf $\mathrm{acl}(A)$ und sei $(\mathrm{d}_q x\phi(x, \overline{y}))$ eine gute Definition von q. Daß p nicht über A forkt, bedeutet, daß p in der nicht–forkenden Fortsetzung einer A-Konjugierten $\alpha(q)$ auf $B\mathrm{acl}(A)$ enthalten ist. Das heißt wiederum, daß p (über B) von den $\alpha(\mathrm{d}_q x\phi(x, \overline{y}))$ definiert wird. Wir sagen dazu: p ist mit allen $\alpha(q_\phi)$, (ϕ L–Formel) verträglich.
Nehmen wir an, daß es für jede endliche Menge Δ von L–Formeln ein α gibt, sodaß p mit $\alpha(q_\Delta)$ verträglich ist. Weil es für jedes Δ nur endlich viele $\alpha(q_\Delta)$ gibt, liefert ein Kompaktheitsargument[2] ein α sodaß p mit allen $\alpha(q_\phi)$ verträglich ist. Also würde p nicht über A forken.
Wenn p über A forkt, gibt es also ein Δ, sodaß kein $\alpha(q_\Delta)$ mit p verträglich ist. Die $\alpha(q_\Delta)$ sind aber schon mit einem endlichen Teil von p unverträglich.

Wir haben sogar gezeigt: Es gibt eine $L(A)$–Formel $\psi(x, \overline{y})$, sodaß $\psi(x, \overline{b}) \in p$ für ein Tupel $\overline{b} \in B$, und jede Erweiterung von $p \restriction A$ auf eine Menge $A\overline{b'}$, die $\psi(x, \overline{b'})$ enthält, über A forkt. □

<u>Übung</u> 2.3.1
Wenn $p \in \mathrm{S}(A)$, gibt es ein $A_0 \subset A$, das höchstens die Mächtigkeit $|T|$ hat, sodaß p die einzige nicht–forkende Fortsetzung von $p \restriction A_0$ auf A ist. Wenn p Morleyrang hat, kann man immer ein endliches solches A_0 finden.

<u>Übung</u> 2.3.2
Es gibt keine aufsteigende Kette $(p_\alpha)_{\alpha \in |T|^+}$ der Länge $|T|^+$von forkenden Erweiterungen.

Satz 2.3.7 (Beschränktheit)
Ein $p \in \mathrm{S}(A)$ hat höchstens $2^{|T|}$ viele nicht–forkende Fortsetzungen auf jedes $B \supset A$.

Beweis:
Sei A_0 eine Teilmenge von A, über der p nicht forkt, und die höchstens die

[2] Die Menge aller α für die $\alpha(q_\Delta)$ ...ist eine clopen Menge des kompakten Raumes $\mathrm{Aut}(\mathrm{acl}(A)/A)$.

Mächtigkeit $|T|$ hat. p hat höchstens so viele nicht–forkende Fortsetzungen wie $p \restriction A_0$ Fortsetzungen auf $\mathrm{acl}(A_0)$ hat. $\square$

Wir führen eine neue Bezeichnung ein:

$$\overline{a} \underset{A}{\downarrow} B$$

bedeutet, daß $\mathrm{tp}(\overline{a}/AB)$ nicht über A forkt.

Satz 2.3.8 (Symmetrie)

$$\overline{a} \underset{A}{\downarrow} \overline{b} \quad \Longrightarrow \quad \overline{b} \underset{A}{\downarrow} \overline{a}$$

Beweis:
Aus 2.3.4, Monotonie und Transitivität folgt, daß wir annehmen können, daß A algebraisch abgeschlossen ist. Jetzt folgt die Behauptung aus 2.1.4. $\square$

Definition 2.3.1
A ist über B von C unabhängig wenn $\overline{a} \downarrow_B C$ für alle Tupel $\overline{a}$ aus A. Notation:

$$A \underset{B}{\downarrow} C$$

Aus Stetigkeit, Monotonie und Symmetrie folgt

$$A \underset{B}{\downarrow} C \Longrightarrow C \underset{B}{\downarrow} A.$$

Satz 2.3.9 (Abgeschlossenheit)
Wenn $p \in \mathrm{S}(B)$ über A forkt, gibt es ein $\phi(x) \in p$, sodaß jeder Typ in $\mathrm{S}(B)$, der $\phi(x)$ enthält, über A forkt.

Beweis:
Wir können annehmen, daß $B = A \cup \{b\}$. Sei c eine Realisierung von p. Dann gilt wegen Symmetrie $b \not\downarrow_A c$. Der Beweis von 2.3.6.2 liefert eine Formel $\psi(y, x)$ mit $\psi(y, c) \in \mathrm{tp}(b/Ac)$, sodaß jede Fortsetzung von $\mathrm{tp}(b/A)$ auf ein Ac', die $\psi(y, c')$ enthält, über A forkt. Setze $\phi(x) = \psi(b, x)$. $\square$

Für $A \subset B$ sei $\mathrm{N}(B/A)$ die Menge aller Typen über B, die über A nicht forken. Der Satz sagt, daß $\mathrm{N}(B/A)$ abgeschlossen in $\mathrm{S}(B)$ ist.

Satz 2.3.10 (Open mapping)
Die Restriktionsabbildung $\pi : \mathrm{N}(B/A) \longrightarrow \mathrm{S}(A)$ ist offen.

Beweis:
Man sieht leicht, daß man B durch ein größeres, genügend saturiertes Modell M ersetzen kann. Wenn zwei Elemente q, q' von $\mathrm{N}(M/A)$ durch π auf den selben

Typ abgebildet werden, sind q und q' konjugiert. Wenn also O eine (relativ) offene Teilmenge von $\mathrm{N}(M/A)$ ist, ist

$$O' = \pi^{-1}(\pi(O)) = \bigcup\{\alpha(O) \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(M/A)\}$$

wieder offen. Also ist

$$\mathrm{S}(A) \setminus \pi(O) = \pi(\mathrm{N}(M/A) \setminus O')$$

als Bild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. □

<u>Übung</u> 2.3.3

$$ab \mathop{\downarrow}_{A} B \iff a \mathop{\downarrow}_{A} B \;\&\; b \mathop{\downarrow}_{Aa} B$$

<u>Übung</u> 2.3.4
Wir nennen eine Menge B unabhängig über A, wenn

$$b \mathop{\downarrow}_{A} B \setminus \{b\}$$

für alle $b \in B$.

Wenn B eine lineare Ordnung trägt, ist B genau dann unabhängig über A, wenn

$$b \mathop{\downarrow}_{A} \{c \in B \mid c < b\}$$

für alle $b \in B$.

<u>Übung</u> 2.3.5
Wenn $B \downarrow_A C$, ist genau dann B unabhängig über A, wenn B unabhängig über AC ist.

<u>Übung</u> 2.3.6
a und b seien zwei unabhängige Realisierungen desselben Typs über $\mathrm{acl}(A)$. Dann ist $\mathrm{tp}(a/Ab)$ stationär.

2.4 T^{eq}

Sei $E_i(\overline{x}, \overline{y})$, $(i \in I)$, eine Liste aller 0–definierbaren Äquivalenzrelationen zwischen n_i–Tupeln. Für jedes Modell M betrachten wir dann die mehrsortige Struktur

$$M^{\mathrm{eq}} = (M, M^{n_i}/E_i)_{i \in I}\,,$$

auf der neben den Relationen, Funktionen und Konstanten der *home sort* M für jedes i die natürlichen Projektionen

$$\pi_i : M^{n_i} \to M^{n_i}/E_i$$

definiert sind. Die Elemente der Sorten M^{n_i}/E_i heißen *imaginäre* Elemente.

Die M^{eq} bilden eine elementare Klasse, die durch eine geeignete vollständige (!) Theorie T^{eq} axiomatisiert wird.

Lemma 2.4.1
Für alle Modelle M gilt:

1. *Die in M^{eq} und in M 0–definierbaren Relationen auf der home sort M stimmen überein.*
2. *Jedes Element von M^{eq} ist definierbar über M:*

$$M^{\mathrm{eq}} = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(M)$$

3. *M^{eq} gestattet* Elimination der Imaginären. *Das heißt: Jede 0–definierbare Äquivalenzrelation ist Faserung einer 0–definierbaren Funktion – von gesorteten m–Tupeln in gesortete n–Tupel. Man kann sogar $n = 1$ erreichen.*

□

Den algebraischen (bzw. definierbaren) Abschluß einer Teilmenge A von M in M^{eq} bezeichnet man mit $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ (bzw. $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$).

Wegen 1. und 2. bleiben im Allgemeinen alle Eigenschaften von T, die in der Stabilitätstheorie eine Rolle spielen beim Übergang zu T^{eq} erhalten. Einige Beispiele

1. T ist genau dann ω_1–kategorisch, wenn T^{eq} ω_1-kategorisch ist.
2. T ist genau dann λ–stabil, wenn T^{eq} λ–stabil ist.
3. T ist genau dann stabil, wenn T^{eq} stabil ist.
4. Sei p ein Typ in T. Dann ist p genau dann stationär, wenn p in T^{eq} stationär ist.

Zu 2 : Sei A eine Parametermenge von T^{eq} der Mächtigkeit λ. A ist im definierbaren Abschluß einer Teilmenge B der home sort, die ebenfalls die Mächtigkeit λ hat. Wenn wir jedem $p \in \mathrm{S}(B)$ zuerst die (einzige) Fortsetzung von p auf $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$ und dann deren Einschränkung auf A zuordnen, erhalten wir eine Surjektion $\mathrm{S}(B) \to \mathrm{S}(A)$. Will man festlegen, was man genau mit $\mathrm{S}(A)$ meint, muß man die Zahl und die Sorten der Variablen der betrachteten Typen angeben. Wenn $\mathrm{S}'(A)$ aus Typen von Elemente der Sorte $\mathbb{C}^n/E$ besteht und $\mathrm{S}_n(A)$ n–Typen der home sort bezeichnet, definiert $\mathrm{tp}(b_1 \dots b_n/A) \mapsto \mathrm{tp}((b_1 \dots b_n)E/A)$ eine Surjektion $\mathrm{S}_n(A) \to \mathrm{S}'(A)$. Jetzt sieht man, daß T^{eq} stabil ist, wenn T stabil ist.

Zu 3 : Sei $\phi(x, y)$ eine unstabile Formel von T^{eq}. Wenn x zur Sorte $\mathbb{C}^m/E$ und y zur Sorte $\mathbb{C}^n/F$ gehört, gibt es Tupel a_i und b_i der home sort, sodaß

$$\models \phi(a_i E, b_i F) \Leftrightarrow i < j.$$

Die Formel $\phi(uE, vF)$ ist zu einer L–Formel $\psi(u, v)$ äquivalent, die in T die Ordnungseigenschaft hat.

Zu 4 : Sei $q \in \mathrm{S}(M)$ über A definierbar und r die Fortsetzung von q auf M^{eq}. Wir zeigen, daß auch r über A definierbar ist. Sei dazu $\phi(x, y)$ eine L^{eq}–Formeln, deren zweite Variable zu Sorte C^n/E gehört und sei $\psi(x, \overline{z})$ eine L–Formel, die zu $\phi(x, \overline{z}E)$ äquivalent ist. Dann ist $\phi(x, bE) \in r$, genau dann, wenn die Formel $\psi(x, \overline{b})$ zu q gehört. Das beweist die Behauptung.

Wir haben Forking bis jetzt nur für Theorien mit Imaginärenelimination eingeführt. Für beliebige Theorien definieren wir:

Definition 2.4.1
Sei T eine stabile Theorie. Ein Typ p forkt nicht über A, wenn er im Sinn von T^{eq} nicht über A forkt.

Wenn T Imaginärenelimination hat ergibt sich die alte Definition, weil dann $\mathrm{acl}(A)$ und $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ interdefinierbar sind. Man sieht leicht, daß die im Abschnitt 2.3 aufgeführten Eigenschaften auch hier gelten. Man muß nur acl durch $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}$ ersetzen.

Man kann Forking auch leicht definieren ohne von T^{eq} Gebrauch zu machen: p forkt nicht über A, wenn p eine Erweiterung mit einer guten Definition über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ hat. Eine definierbare Klasse X ist nach 2.2.1 genau dann über $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ definierbar, wenn X aus Klassen einer A–definierbaren endlichen Äquivalenzrelation besteht.

<u>Übung</u> 2.4.1
T hat genau dann Imaginärenelimination, wenn

a) jedes imaginäre Element interdefinierbar mit einem Elementtupel aus der home sort ist, und wenn

b) es zwei 0–definierbare Elemente gibt.

Kapitel 3

Primerweiterungen

Wir nehmen an, daß T stabil ist und Imaginärenelimination gestattet.

3.1 Indiscernibles

Eine Familie $\mathcal{I} = (a_i)_{i \in I}$ von paarweise verschiedenen Elementen (allgemeiner: Tupel) heißt *indiscernible* über A, wenn

$$M \models \phi(a_{i_1}, \ldots a_{i_k}) \leftrightarrow \phi(a_{j_1}, \ldots a_{j_k})$$

für alle $L(A)$–Formeln ϕ und je zwei Folgen $i_1 \ldots i_k$, $j_1 \ldots j_k$ von jeweils paarweise verschiedenen Indices.

Lemma 3.1.1
Orderindiscernibles sind indiscernible.

Beweis:
$\mathcal{I} = (a_i)_{i \in I}$ seien Ordnungsindiscernibles über A, die nicht indiscernible über A sind. Wir können annehmen, daß $(I, <) = (\mathbb{Q}, <)$ (wegen Übung 1.1.1). Weil jede Permutation von n Ziffern Produkt von benachbarten Transpositionen ist, gibt es eine $L(A)$–Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, rationale Zahlen $r_1 < \ldots < r_n$ und eine Stelle j, sodaß

$$\models \phi(a_{r_1}, \ldots, a_{r_j}, a_{r_{j+1}}, \ldots, a_{r_n})$$

und

$$\models \neg\phi(a_{r_1}, \ldots, a_{r_{j+1}}, a_{r_j}, \ldots, a_{r_n}).$$

Die Formel $\psi(x, y) = \phi(a_{r_1}, \ldots, x, y, \ldots, a_{r_n})$ ordnet dann die Elemente (a_r), $(r_j < r < r_{j+1})$. Aus der Übung 2.1.1 folgt, daß T nicht stabil sein kann. $\square$

Sei $p \in \mathrm{S}(A)$ ein stationärer Typ. Eine *Morleyfolge* von p ist eine über A unabhängige Menge von Realisierungen von p. Morleyfolgen $(a_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ lassen sich auf folgende Weise leicht konstruieren: Man wählt für a_α eine Realisierung der

(!) nicht–forkenden Fortsetzung von p auf $A \cup \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Nach der Übung 2.3.4 ist $\{a_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ unabhängig über A. Weil jede Morleyfolge (wie man sie auch aufzählt) so konstruiert ist, sind Morleyfolgen von p bis auf Isomorphie über A (durch λ) eindeutig bestimmt. Wenn p nicht algebraisch ist, sind alle a_α verschieden also Indiscernibles über A.

Übung 3.1.1
Sei p stationär und q eine nicht–forkende Erweiterung von p. Dann ist jede Morleyfolge von q auch Morleyfolge von p.

Satz 3.1.2
Eine unendliche Folge von Indiscernibles über A ist eine Morleyfolge eines über einer Erweiterung von A definierten stationären Typs.

Beweis:
Seien $\mathcal{I} = (a_i)_{i\in I}$ indiscernible über A. Wir zeigen zuerst, daß für alle Formeln $\phi(x, \bar{b})$ die Menge J_ϕ aller $i \in I$ mit $\models \phi(a_i)$ endlich oder koendlich in I ist: Sonst wäre für alle $J \subset I$ die Formelmenge

$$\{\phi(a_j, \bar{y}) \mid j \in J\} \cup \{\neg\phi(a_i, \bar{y}) \mid i \not\in J\}$$

konsistent. Über $\mathcal{I}$ würde es also $2^{|I|}$ viele $\tilde{\phi}$–Typen geben und T wäre nicht stabil. Der Beweis zeigt auch, daß es eine nur von ϕ abhängige Zahl k_ϕ gibt, die J_ϕ oder $I \setminus J_\phi$ beschränkt.

Sei M ein genügend saturiertes Modell, das $\mathcal{I}$ enthält. Wir definieren den Durchschnittstyp von $\mathcal{I}$ durch

$$\mathrm{Av}(\mathcal{I}) = \{\phi(x, \bar{b}) \mid \bar{b} \in M,\ \models \phi(a_i, \bar{b}) \text{ für fast alle } i \in I\}.$$

Sei I_0 eine unendliche Teilmenge von I. Weil $\phi(x, \bar{b})$ genau dann zu $\mathrm{Av}(\mathcal{I})$ gehört, wenn $\{i \in I_0 \mid \models \phi(a_i, \bar{b})\}$ mehr als k_ϕ viele (also unendliche viele) Elemente enthält, ist $\mathrm{Av}(\mathcal{I})$ über $\mathcal{I}_0$ definierbar. $\mathrm{Av}(\mathcal{I})$ forkt also nicht über $\mathcal{I}_0$ und seine Einschränkung auf $\mathcal{I}_0$ ist stationär. (Man sagt: $\mathrm{Av}(\mathcal{I})$ ist über $\mathcal{I}_0$ basiert (vgl. Seite 55).)

Man sieht nun leicht, daß alle Elemente a_i, $(i \in I \setminus I_0)$, den Typ

$$p = \mathrm{Av}(\mathcal{I}) \restriction A\mathcal{I}_0$$

realisieren. Weil das auch für alle $I_0' \supset I_0$ gilt, folgt, daß die a_i, $(i \in I \setminus I_0)$, eine Morleyfolge von p sind. Hätte man zu Beginn des Beweis $\mathcal{I}$ um eine unendliche Menge zu Indiscernibles $\mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}$ vergrößert, würde man jetzt erkennen, daß $\mathcal{I}$ eine Morleyfolge von p ist. □

Übung 3.1.2
Sei $p \in \mathrm{S}(A)$ stationär und $\mathcal{I}$ ein Morleyfolge von p.

a) Sei B eine Erweiterung von A und $\mathcal{I}_0$ eine Teilmenge von $\mathcal{I}$ mit $B \perp_{A\mathcal{I}_0} \mathcal{I}$. Dann ist $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ eine Morleyfolge der nicht–forkenden Erweiterung von p auf B.

b) $\mathrm{Av}(\mathcal{I})$ ist die nicht–forkende Erweiterung von p auf M.

<u>Übung</u> 3.1.3
Zwei Mengen von Indiscernibles $\mathcal{I}_0$ und $\mathcal{I}_1$ nennen wir parallel, wenn es eine unendliche Menge $\mathcal{J}$ gibt, sodaß $\mathcal{I}_0\mathcal{J}$ und $\mathcal{I}_1\mathcal{J}$ indiscernible sind. Zeige, daß $\mathcal{I}_0$ und $\mathcal{I}_1$ genau dann parallel sind, wenn sie den gleichen Durchschnittstypen haben.

<u>Übung</u> 3.1.4
Zwei stationäre Typen heißen parallel, wenn sie eine gemeinsame nicht–forkende Erweiterung haben. Zeige, daß zwei Typen genau dann parallel sind, wenn zwei (oder alle) ihrer Morleyfolgen parallel sind.

3.2 Total transzendente Theorien

Sei T eine total transzendente Theorie. Wir werden in diesem Abschnitt den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.2.1 (Shelah [9])

1. *M ist genau dann Primerweiterung von A, wenn M atomar über A ist und wenn M keine überabzählbare Menge von Indiscernibles über A enthält.*
2. *Primerweiterungen sind eindeutig bestimmt.*

Eine Menge $B = \{b_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ ist eine *Konstruktion* über A, wenn (mit der Bezeichnung $B_\alpha = \{b_\beta \mid \beta < \alpha\}$) alle $\mathrm{tp}(b_\alpha/AB_\alpha)$ isoliert sind. Im Beweis von 1.2.1 haben wir gezeigt, daß alle A konstruktible Erweiterungen haben, die Modelle sind: konstruktible Primerweiterungen.

Das folgende Lemma gilt für beliebige T.

Lemma 3.2.2
Sei B konstruktibel über A und C ein Teilmenge von B mir folgender Eigenschaft: Für jedes $b_\alpha \in C$ wird $\mathrm{tp}(b_\alpha/AB_\alpha)$ von einer über $A \cup (B_\alpha \cap C)$ definierten Formel isoliert. Dann ist B auch konstruktibel über AC.

Beweis:
Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, daß A leer ist. Wir wollen zeigen, daß für jedes α der Typ $\mathrm{tp}(b_\alpha/CB_\alpha)$ isoliert ist. Wenn b_α zu C gehört, ist das klar. Sei nun $b_\alpha \notin C$. Aus der Voraussetzung folgt leicht, daß C über $B_{\alpha+1}$ isoliert ist (siehe Beweis von 1.2.1), wobei die isolierenden Formeln nur Parameter aus $B_{\alpha+1} \cap C \subset B_\alpha$ enthalten. Es folgt also

$$\mathrm{tp}(C/B_\alpha) \vdash \mathrm{tp}(C/B_\alpha b_\alpha).$$

Wenn jetzt $\phi(x)$ den Typ $\mathrm{tp}(b_\alpha/B_\alpha)$ isoliert, isoliert $\phi(x)$ auch den Typ $\mathrm{tp}(b_\alpha/CB_\alpha)$. □

Lemma 3.2.3
Sei $\mathcal{I}$ indiscernible über A und B eine abzählbare Menge. Dann hat $\mathcal{I}$ eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{I}_0$, sodaß $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ indiscernible über $AB\mathcal{I}_0$ ist.

Beweis:
$\mathcal{I}$ ist Morleyfolge eines stationären Typs über einer Erweiterung A' von A. Weil T total transzendent ist, brauchen wir zu A nur endlich viele Elemente hinzuzunehmen. (Das folgt aus den Übungen 2.3.1 und 3.1.1). Wir können also annehmen, daß $A' = A$. Zu jedem endlichen Tupel $\bar{b}$ aus B gibt es ein endliches $\mathcal{I}_0$ sodaß $\bar{b} \mathop{\smile\kern-0.6em\raise0.3ex\hbox{$|$}}_{A\mathcal{I}_0} \mathcal{I}$. Wir finden also ein abzählbares $\mathcal{I}_0$, sodaß

$$B\mathcal{I}_0 \underset{A\mathcal{I}_0}{\downarrow} \mathcal{I}.$$

Aus der Übung 3.1.2 folgt, daß $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ eine Morleyfolge über $AB\mathcal{I}_0$ ist. □

Wir machen im Beweis des nächsten Lemmas Gebrauch von etwas Mengenlehre: Ein *club* $D \subset \omega_1$ ist eine abgeschlossene und unbeschränkte Teilmenge (closed–unbounded). Die Abgeschlossenheit bedeutet, daß $\sup(\alpha \cap D) \in D$ für alle $\alpha \in \omega_1$.

Satz (Fodor)
Sei $D \subset \omega_1$ ein club und $f : D \to \omega_1$ eine regressive Funktion, d.h. $f(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in D$. Dann ist f auf einer unbeschränkten Teilmenge von ω_1 konstant.

Die eine Hälfte von 3.2.1(1) folgt aus

Lemma 3.2.4
Wenn B konstruktibel über A ist, enthält B keine überabzählbare Menge von Indiscernibles über A.

Beweis:
Wir nehmen $A = \emptyset$ an. Sei $\mathcal{I} = \{c_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ indiscernible. Wir nennen eine Teilmenge C von B, die die Eigenschaft von Lemma 3.2.2 hat *abgeschlossen*. Wir wählen eine stetige Folge C_α von abzählbaren abgeschlossenen Teilmengen von B mit $c_\alpha \in C_{\alpha+1}$. Mit Hilfe des letzten Lemmas (3.2.3) finden wir einen club D aus Limeszahlen, sodaß für alle $\delta \in D$ die Menge $\{c_\alpha \mid \alpha \geq \delta\}$ indiscernible über C_δ ist. Jedes c_δ wird über C_δ isoliert von einer Formel mit Parametern aus einen C'_δ mit $\delta' < \delta$. Nach dem Satz von Fodor gibt es ein δ_0 sodaß man für eine kofinale Menge von δ's aus D die Parameter der isolierenden Formeln aus C_{δ_0} findet. Seien $\delta_1 < \delta_2$ zwei solche. Dann haben c_{δ_1} und c_{δ_2} denselben Typ über C_{δ_0}, was aber unmöglich ist, weil

$$\mathrm{tp}(c_{\delta_2}/C_{\delta_0}) \vdash \mathrm{tp}(c_{\delta_2}/C_{\delta_0} c_{\delta_1}).$$

□

Sei M ein Modell und A eine Teilmenge von M. Wir nennen eine Teilmenge B von M *normal* in M über A, wenn für jedes Element $b \in B$ auch alle anderen Elemente von M, die denselben Typ über A haben, in B liegen.

Lemma 3.2.5
Sei T eine Theorie die Primerweiterungen hat (aber nicht notwendig total transzendent sein muß). Sei M atomar über A, und $A \subset B \subset M$ normal. Dann ist M auch atomar über B.

Beweis:
Sei c ein Tupel aus M. Weil die atomaren Typen dicht über B sind, gibt es ein $d \in M$, das atomar über B ist und denselben Typ wie c über A hat. $\mathrm{tp}(d/B)$ sei isoliert durch $\psi(x, d_0)$ für ein Tupel $d_0 \in B$. Weil c und d denselben Typ über A haben, gibt es ein $c_0 \in M$ mit $\mathrm{tp}(cc_0/A) = \mathrm{tp}(dd_0/A)$. Wegen der Normalität von B ist $c_0 \in B$. c erfüllt $\psi(x, c_0)$ und aus der Normalität von B folgt leicht, daß auch $\psi(x, c_0)$ vollständig über B ist. □

Beweis (von 3.2.1(1)):
Wir können wieder annehmen, daß A leer ist. Sei also M atomar über $\emptyset$ ohne

überabzählbare Mengen von Indiscernibles. Wir zeigen, daß M sich in jedes Modell N einbetten läßt. Dazu zeigen wir:

Behauptung: *Sei M atomar über B, $p \in \mathrm{S}(B)$ und $B \subset C \subset M$ normal über B. Dann läßt sich jede elementare Abbildung $C \longrightarrow N$ auf $C \cup p(M)$ fortsetzen.*

$f : M \longrightarrow N$ gewinnt man daraus auf folgende Weise: Man setzt $B = \emptyset$ und wählt eine Aufzählung $(p_\mu)_{\mu<\nu}$ aller in M realisierten Typen über $\emptyset$. Dann setzt man die leere Abbildung rekursiv auf die normalen Mengen $C_\mu = \bigcup_{\alpha<\mu} p_\alpha(M)$ fort.

Beweis der Behauptung: Durch Induktion über den Morleyrang von p. Zuerst macht man sich klar, daß aus der Behauptung (für festgehaltenes B und Morleyrang α) folgt, daß sich jede elementare Abbildung $C \longrightarrow N$ auf $C \cup \{a \in M \mid \mathrm{MR}(a/B) = \alpha\}$ fortsetzen läßt. Sei jetzt $f : C \longrightarrow N$ gegeben und die Behauptung schon für alle Ränge kleiner als α gezeigt (o.E. ist $\alpha > 0$). Zunächst setzen wir f auf $C \cup \mathrm{acl}(B)$ fort. Wenn wir jetzt B durch $\mathrm{acl}(B)$ ersetzen, gelten die Voraussetzungen immer noch. Wir können also annehmen, daß B algebraisch abgeschlossen ist. p ist dann stationär.

Sei $(c_i)_{i<\mu}$ eine maximale über B unabhängige Menge von Realisierungen von p in M. Weil die (c_i) indiscernible über B sind, ist μ abzählbar, wir können also annehmen, daß $\mu \leq \omega$. Sei $B_i = B \cup \{c_0, \ldots, c_{i-1}\}$ und $C_i = C \cup \{a \in M \mid \mathrm{MR}(a/B_i) < \alpha\}$. Wir haben $B = B_0$ und $C = C_0$. Aus der Maximalität folgt, daß $p(M) \subset \bigcup_{i<\mu} C_i$. Weil M atomar über B ist, ist M auch atomar über B_i, und weil C_i normal über B_i ist, auch atomar über C_i. Wenn f schon auf C_i fortgesetzt ist, können wir wegen der Atomarität f auf $C_i B_{i+1}$ fortsetzen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Fortsetzung auf C_{i+1}. □

Beweis (von 3.2.1(2)):
Der einseitige Beweis von 3.2.1(1) läßt sich leicht in einen zweiseitigen Beweis verwandeln. □

Beispiel [11]
L enthalte für jede Ordinalzahl $\alpha < \omega_1$ ein zweistelliges Relationszeichen E_α. Die Theorie T besage, daß jedes E_α eine Äquivalenzrelation sei. E_0 besitze nur eine Äquivalenzklasse; ferner sei für $\alpha < \beta < \omega_1$ jede E_α–Äquivalenzklasse eine Vereinigung von unendlich vielen E_β–Äquivalenzklassen. T ist vollständig, stabil (aber nicht total transzendent) und läßt Quantorenelimination zu. Jede konsistente $L(A)$–Formel $\varphi(x)$ läßt sich über A vervollständigen. Es gibt also ein Modell M das konstruktibel über der leeren Menge ist.

In M besitzt jede Kette $(K_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ von E_α–Äquivalenzklassen in M einen nichtleeren Durchschnitt: anderenfalls gäbe es nämlich eine abzählbare Teilmenge A von M und eine Limesordinalzahl $\eta < \omega_1$ mit:

(i) A ist abgeschlossen (bezüglich einer fest gewählten Konstruktion);

(ii) $A \cap \bigcap_{\alpha<\eta} K_\alpha = \emptyset$;

(iii) $A \cap K_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha < \eta$.

M/A ist atomar. Sei nun $c \in K_\eta$; $\mathrm{tp}(c/A)$ wird dann isoliert durch eine Formel $\varphi(x; \overline{a})$; wegen (ii) existiert ein $\alpha < \eta$ mit $\overline{a} \cap K_\alpha = \emptyset$. Aus (iii) folgt, daß ein $d \in A \cap K_\alpha$ existiert; wegen $\overline{a} \cap K_\alpha = \emptyset$ hätte man auch $\models \varphi(d; \overline{a})$; das ist aber unmöglich, weil φ $\mathrm{tp}(c/A)$ isoliert. Es gilt folglich $\cap(K_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \neq \emptyset$.

Sei nun $a \in M$ und N sei die Menge aller b aus M, für die eine Ordinalzahl $\alpha < \omega_1$ existiert mit $\models \neg a E_\alpha b$; N ist dann ebenfalls ein Primmodell, aber M und N sind nicht isomorph.

3.3 Abzählbare stabile Theorien

Wenn man den Beweis von 3.2.1(1) analysiert, sieht man, daß wir dort (direkt) gezeigt haben, daß atomare Primerweiterungen von A ohne überabzählbare Indiscernibles konstruktibel sind. Die Eindeutigkeit der Primerweiterungen hätte man dann aus dem folgenden Satz schließen können, der für beliebige Theorien gilt.

Satz 3.3.1 (Ressayre)
Konstruktible Primerweiterungen sind eindeutig bestimmt.

Beweis:
Es genügt den Satz für zwei konstruktible Primerweiterungen M und M' der leeren Menge zu beweisen. $f_0 : E_0 \to E_0'$ sei eine maximale elementare Abbildung zwischen zwei abgeschlossenen Mengen $E_0 \subset M$ und $E_0' \subset M'$. Falls $E_0 \neq M$, gibt es eine echte abgeschlossene Erweiterung E_1 mit endlicher Differenz $E_1 \setminus E_0$. Da E_1 über E_0 atomar ist, gibt es eine Erweiterung $f_1 : E_1 \to E_1'$ von f_0. E_1' braucht nicht abgeschlossen zu sein, aber es gibt eine abgeschlossene Erweiterung E_2' von E_1' mit endlicher Differenz $E_2' \setminus E_1'$. Dann existiert eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Menge $E_2 \subset M$ und eine Fortsetzung von f_1 zu einem Isomorphismus $f_2 : E_2 \to E_2'$. Setzt man diesen Prozess fort, so erhält man eine aufsteigende Folge von elementaren Isomorphismen $f_i : E_i \to E_i'$. $E_\infty := \cup E_i$ und $E_\infty' := \cup E_i'$ sind dann abgeschlossen, und $f_\infty := \cup f_i$ ist ein elementarer Isomorphismus von E_∞ auf E_∞', was der Maximalität von f_0 widerspricht. □

Satz 3.3.2 (Shelah [11])
Ist T stabil und abzählbar, so ist jede Teilmenge einer über A konstruierbaren Menge wieder über A konstruierbar.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar das folgende Korollar:

Folgerung 3.3.3
In abzählbaren, stabilen Theorien sind Primerweiterungen eindeutig bestimmt, wenn Primerweiterungen immer existieren.

Zum Beweis des Satzes wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma 3.3.4
Sei T abzählbar und stabil; sind A und B über C unabhängig, und ist B' abzählbar, so gibt es eine abzählbare Teilmenge C' von A, so daß A und BB' über CC' unabhängig sind.

Beweis:
C' sei eine abzählbare Teilmenge von A mit $ABC \downarrow_{BCC'} B'$; dann gilt auch $A \downarrow_{BCC'} B'$, und wegen $A \downarrow_{CC'} B$ folgt $A \downarrow_{CC'} BB'$. □

Beweis von 3.3.2:
Sei B konstruierbar über A und D eine Teilmenge von B. Falls E eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von B ist und falls $E' \subset B$ eine abzählbare

Erweiterung von E (also mit abzählbarer Differenz $E' \setminus E$) ist, so existiert eine abzählbare abgeschlossene Erweiterung E'' von E'. Ebenso gibt es für E mit $D \perp_{A(D\cap E)} E$ und jeder abzählbare Erweiterung von E' von E eine abzählbare Erweiterung E'' mit $D \perp_{A(D\cap E'')} E''$ (3.3.4).

Wendet man diese beiden Abschlußprozesse abwechslungsweise abzählbar oft an, so sieht man, daß es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge E von B mit

$$D \underset{A(D\cap E)}{\perp} E$$

und zu jeder abzählbaren Erweiterung E' von E eine abzählbare abgeschlossene Erweiterung E'' gibt mit

$$D \underset{A(D\cap E'')}{\perp} E''.$$

Man kann daher eine stetige Kette $(C_\alpha)_{\alpha<\xi}$ von abgeschlossenen Mengen konstruieren mit $C_0 = \emptyset$, $\bigcup_{\alpha<\xi} C_\alpha = B$, abzählbaren Differenzen $C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha$ und

$$D \underset{A(D\cap C_\alpha)}{\perp} C_\alpha.$$

Zu jedem α wähle man eine ω–Aufzählung von $D \cap (C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha)$; diese Aufzählungen setze man zu einer Aufzählung von D zusammen. Um zu zeigen, daß diese Aufzählung eine Konstruktion von D ist, genügt es zu zeigen, daß jedes endliche Anfangsstück $\overline{d}$ von $D \cap (C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha)$ atomar über $A(D \cap C_\alpha)$ ist. Das folgt aber aus dem Open Mapping Theorem (2.3.10), weil $\overline{d}$ atomar über AC_α ist. □

3.4 Interne Typen

Modelle ω_1–kategorischer Theorien sind (minimale) Primerweiterung von streng minimalen Mengen. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß hier die Primerweiterungen auf besonders einfache Art gebildet sind. Wir benötigen dazu den Begriff des *internen* Typs.

T sei in diesem Abschnitt total transzendent. Wir arbeiten im Monstermodell $\mathbb{C}$. Definierbare Teilklassen von $\mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \ldots$. Alle anderen betrachteten Menge sollen klein im Vergleich zu $\mathbb{C}$ sein. $\mathbb{F} = \phi_0(\mathbb{C})$ bezeichne eine feste 0–definierbare unendliche Teilklasse von $\mathbb{C}$.

<u>Beispiel</u>
Sei G eine Gruppe.

$$M = (G, A)$$

sei eine zweisortige Struktur, wobei A eine Kopie von G ist, die aber keinerlei Struktur trägt. Vielmehr gehört die Abbildung

$$\pi : G \times A \to A$$

definiert durch $\pi(g, a) = ga$ zu M. M ist dann Primerweiterung von G. Die Typen aller Elemente von A sind G–intern im Sinn der folgenden Definition.

Definition 3.4.1
Eine Typ $p \in \mathrm{S}(A)$ heißt $\mathbb{F}$–intern, wenn für eine Menge B

$$p(\mathbb{C}) \subset \mathrm{dcl}(\mathbb{F}B).$$

Lemma 3.4.1
p ist genau dann $\mathbb{F}$–intern, wenn es eine Parametermenge B und eine Realisierung e von p gibt mit $e \in \mathrm{dcl}(\mathbb{F}B)$ und $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.

Beweis:
Wenn $p(\mathbb{C}) \subset \mathrm{dcl}(\mathbb{F}B)$, nehmen wir für e eine Realisierung von p, die unabhängig von B über A ist.

Wenn umgekehrt eine Realisierung e mit $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b$ und $e \in \mathrm{dcl}(\mathbb{F}b)$ gegeben ist, wählen wir eine Morleyfolge $b_0, b_1, \ldots$ von $\mathrm{tp}(b/\mathrm{acl}(A))$ der Länge $|T|^+$. Wenn e' eine beliebiges Element von $p(\mathbb{C})$ ist, gibt es ein i mit $e' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b_i$[1]. Nehmen wir zunächst an, daß p stationär ist. Dann ist $eb \sim_A e'b_i$. Es folgt $e' \in \mathrm{dcl}(\mathbb{F}b_i)$. Für $B = \{b_0, b_1 \ldots\}$ ist also $p(\mathbb{C}) \subset \mathrm{dcl}(\mathbb{F}B)$.
Wenn p nicht stationär ist, haben wir nur gezeigt, daß $\mathrm{tp}(e/\mathrm{acl}(A))$ $\mathbb{F}$–intern ist. Dann sind aber *alle* Fortsetzungen von p auf $\mathrm{acl}(A)$ $\mathbb{F}$–intern. Es muß also eine Menge B geben, sodaß die Realisierungen aller Fortsetzungen von p auf $\mathrm{acl}(A)$ in $\mathrm{dcl}(\mathbb{F}B)$ liegen. □

Eine Gruppe G operiert *regulär* auf einer Menge A, wenn es für alle $a, b \in A$ genau ein $g \in G$ mit $ga = b$ gibt. $\mathbb{F}^{\mathrm{eq}} \subset \mathbb{C}^{\mathrm{eq}}$ besteht aus den Klassen 0–definierbarer Äquivalenzklassen, die Repräsentanten aus $\mathbb{F}^n$ haben.

[1] Sonst wäre $p_i = \mathrm{tp}(e'/\mathrm{acl}(A)b_1 \ldots b_{i-1})$ eine zu lange Kette von forkenden Erweiterungen.

Satz 3.4.2
T sei eine total transzendente Theorie. Wenn $p \in \mathrm{S}(\emptyset)$ $\mathbb{F}$–intern ist, gibt es eine definierbare Gruppe $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}^{\mathrm{eq}}$ und eine definierbare Klasse $\mathbb{A}$, auf der $\mathbb{G}$ regulär operiert mit $p(\mathbb{C}) \subset \mathrm{dcl}(\mathbb{F}a)$ für alle $a \in \mathbb{A}$. $\mathbb{G}$, $\mathbb{A}$, die Gruppenoperation und die Operation von $\mathbb{G}$ auf $\mathbb{A}$ sind mit Parametern aus $\mathbb{F}$ definierbar.

Beweis:
Sei $p(\mathbb{C}) \subset \mathrm{dcl}(\mathbb{F}B)$. Eine Kompaktheitsüberlegung zeigt die Existenz eines $\eta \in p$ mit $\mathbb{E} = \eta(\mathbb{C}) \subset \mathrm{dcl}(\mathbb{F}B)$ (eine solches $\mathbb{E}$ heißt $\mathbb{F}$–intern). Weiter findet man eine B–definierbare partielle Surjektion von $\mathbb{F}^m$ auf $\mathbb{E}$. Aus dem nächsten Lemma folgt, daß diese Surjektion mit Parametern aus $\mathbb{F}$ und $\mathbb{E}$ definierbar ist. Wir bauen die Parameter aus $\mathbb{F}$ in die Funktion ein und erhalten eine 0–definierbare partielle Abbildung

$$\pi : \mathbb{F}^n \times \mathbb{E}^k \to \mathbb{E},$$

die für mindestens ein festgehaltenes $e \in \mathbb{E}^k$ surjektiv ist. Weil die isolierten Typen über $\mathbb{F}$ dicht sind, finden wir e in einer $\mathbb{F}$–definierbaren Klasse $\mathbb{A}$, die einen vollständigen Typ über $\mathbb{F}$ bestimmt[2]. Wir schränken π ein:

$$\pi : \mathbb{F}^n \times \mathbb{A} \to \mathbb{E}$$

Es ist klar, daß $p(\mathbb{C}) \subset \mathbb{E} \subset \mathrm{dcl}(\mathbb{F}a)$ für alle $a \in \mathbb{A}$. π ergibt auf naheliegende Weise eine partielle Abbildung

$$\pi : \mathbb{F}^{nk} \times \mathbb{A} \to \mathbb{E}^k.$$

Sei $\mathbb{H}$ die Menge aller $h \in \mathbb{F}^{nk}$, für die $\pi(h, a) \in \mathbb{A}$ für ein (oder äquivalent für alle) $a \in \mathbb{A}$. Wir nennen h_1 und h_2 äquivalent, wenn $\pi(h_1, a) = \pi(h_2, a)$ für ein (alle) $a \in \mathbb{A}$. Wir verknüpfen zwei Äquivalenzklassen durch die Bestimmung

$$\pi(h_1 \circ h_2, a) = \pi(h_1, \pi(h_2, a))$$

für ein (alle) $a \in \mathbb{A}$.

Aus diese Weise werden die Äquivalenzklassen auf $\mathbb{H}$ zu einer definierbaren Gruppe $\mathbb{G}$, die definierbar auf $\mathbb{A}$ operiert. □

Lemma 3.4.3
Sei T stabil und $\mathbb{F}$ ohne Parameter definierbar. Dann läßt sich jede definierbare Teilklasse von $\mathbb{F}$ mit Parametern aus $\mathbb{F}$ definieren.

Beweis:
Sei $\psi(a, \mathbb{C})$ eine definierbare Teilklasse von $\mathbb{F}^n$. Der Typ $q = \mathrm{tp}(a/\mathbb{F})$ ist definierbar, wie wir uns gleich überlegen. Dann ist

$$\psi(a, \mathbb{C}) = \{f \in \mathbb{F}^n \mid \models \mathrm{d}_q x \psi(x, f)\}.$$

Sei q ein Typ über der Menge[3] F und $\tilde{q}$ eine Erweiterung auf $\mathrm{acl}(F)$. $\tilde{q}$ ist definierbar. Sei $\mathrm{d}_{\tilde{q}} x \psi(x, y) = \widetilde{\psi}(y, a)$ für ein Tupel $a \in \mathrm{acl}(A)$, dessen Typ über

[2] Man kann zeigen, daß $\mathbb{A}$ mit atomaren Parametern aus $\mathbb{F}$ definiert werden kann.
[3] Wenn q ein Typ über einer Klasse $\mathbb{F}$ ist, kann man etwas vorsichtiger so argumentieren: Man wählt eine Menge $F \subset \mathbb{F}$, sodaß q nicht über F forkt und die einzige nicht–forkende Fortsetzung von $q \upharpoonright F$ auf $\mathbb{F}$ ist. Alle Fortsetzungen $\tilde{q}$ auf $\mathrm{acl}(F)$ liefern eine Definition von q etc.

A von $\epsilon(z)$ isoliert wird. Dann können wir setzen:

$$\mathrm{d}_q x\psi(x, y) = \exists z(\widetilde{\psi}(y, z) \wedge \epsilon(z)).$$

$\square$

<u>ÜBUNG</u> 3.4.1
Sei T stabil und $\mathbb{F}$ definierbar. Dann ist jede definierbare Teilklasse von $\mathbb{F}$ Durchschnitt von $\mathbb{F}$ mit einer Klasse, die mit Parametern aus $\mathbb{F}$ definierbar ist.

<u>ÜBUNG</u> 3.4.2 **(Poizats Groupe de Liaison ([8]))**
T sei total transzendent. $\mathbb{E}$ und $\mathbb{F}$ seien 0–definierbar und $\mathbb{E}$ sei $\mathbb{F}$ intern. Dann ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ eine $\mathbb{F}$–definierbare Permutationsgruppe. $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ operiert regulär auf $\mathbb{A}$ ($\mathbb{A}$ wie im Beweis von 3.4.2) und ist definierbar isomorph zu $\mathbb{G}$.

3.5 ω_1–kategorische Theorien

T sei in diesem Abschnitt eine stabile Theorie mit Imaginärenelimination.

Definition 3.5.1
Sei $\mathbb{F}$ eine 0–definierbare Klasse. Ein Typ $p \in \mathrm{S}(\emptyset)$ heißt $\mathbb{F}$–analysierbar in endlich vielen Schritten, wenn es für jede Realisierung a von p eine Folge von Tupeln $a_0, \dots, a_n$ gibt, sodaß

a) $a_n = a$ und $a_i \in \mathrm{dcl}(a)$ für alle i.

b) Alle Typen $\mathrm{tp}(a_i/a_0 \dots a_{i-1})$ sind $\mathbb{F}$–intern.

Satz 3.5.1 (Hrushovski [4])
Sei T ω_1–kategorisch und $\mathbb{F}$ eine 0–definierbare streng minimale Menge. Dann ist jeder Typ $p \in \mathrm{S}(\emptyset)$ $\mathbb{F}$–analysierbar in endlich vielen Schritten.

Zum Beweis des Satzes brauchen wir einige Vorbereitungen.

Sei p ein stationärer Typ. Man sagt, daß p auf B *basiert*, wenn p parallel zu einem auf B definierten Typ ist. Die *kanonische Basis* $\mathrm{Cb}(p)$ von p ist, für eine gute Definition d_p, die Menge der kanonischen Parameter aller Formeln $\mathrm{d}_p x\phi(x, \overline{y})$.

Lemma 3.5.2
$p \in \mathrm{S}(A)$ basiert genau dann auf B, wenn $\mathrm{Cb}(p) \subset \mathrm{dcl}(B)$.

Beweis:
Es ist klar, daß $\mathrm{Cb}(p) \subset \mathrm{dcl}(A)$, wenn $p \in \mathrm{S}(A)$. Parallele Typen werden durch die gleichen Formeln definiert. Also folgt $\mathrm{Cb}(q) = \mathrm{Cb}(p) \subset \mathrm{dcl}(B)$, wenn $q \in \mathrm{S}(B)$ parallel zu p ist. Wenn andererseits $\mathrm{Cb}(p) \subset \mathrm{dcl}(B)$, wählen wir eine nicht–forkende Fortsetzung r von p, die auf einer Obermenge von $\mathrm{dcl}(B)$ definiert ist. Weil r über $\mathrm{Cb}(p)$ und also über $\mathrm{dcl}(B)$ und damit auch über B definiert ist, ist r die nicht–forkende Fortsetzung des stationären Typs $q = r \upharpoonright B$. q ist parallel zu p. $\square$

Durch die Eigenschaft des Lemmas ist $\mathrm{Cb}(p)$ bis auf Interdefinierbarkeit eindeutig bestimmt.

Satz 3.5.3
Sei $p \in \mathrm{S}(A)$ ein stationärer Typ.

1. *Wenn $\mathcal{I}$ eine unendliche Morleyfolge von p ist, ist $\mathrm{Cb}(p) \subset \mathrm{dcl}(\mathcal{I})$.*
2. *p forkt genau dann nicht über $B \subset A$, wenn $\mathrm{Cb}(p) \subset \mathrm{acl}(B)$.*

Beweis:
1): Nach der Übung 3.1.2(b) ist der Durchschnittstyp $\mathrm{Av}(\mathcal{I})$ die nicht–forkende

Erweiterung von p auf das Monstermodell. Aus dem Beweis von 3.1.2 folgt, daß $\mathrm{Av}(p)$ auf $\mathcal{I}$ basiert.

2): p forkt genau dann nicht über B, wenn p auf $\mathrm{acl}(B)$ basiert ist. □

Sei $\mathbb{F}$ eine 0–definierbare Klasse und $p \in \mathrm{S}(A)$. p heißt *orthogonal*[4] zu $\mathbb{F}$, wenn für jede Realisierung b von p, jedes $c \in \mathbb{F}$ und jede Erweiterung B von A

$$b \underset{A}{\perp} B \quad \Longrightarrow \quad b \underset{B}{\perp} c.$$

Lemma 3.5.4
Sei T ω_1–kategorisch und $\mathbb{F}$ eine 0–definierbare streng minimale Menge. Dann ist kein nicht–algebraischer Typ orthogonal zu $\mathbb{F}$.

Beweis:
Sei $p \in \mathrm{S}(A)$ orthogonal zu $\mathbb{F}$. Wir wählen ein Modell M, das A enthält, eine Realisierung b von p, die über A unabhängig von M ist und ein Modell N, das M und b enthält. Aus der Voraussetzung folgt, daß b über M unabhängig von $\mathbb{F}(N)$ ist. Weil andererseits N (minimale) Primerweiterung von $M \cup \mathbb{F}(N)$ ist, ist b atomar über $M\bar{c}$ für ein Tupel $\bar{c} \in \mathbb{F}(N)$, sagen wir isoliert durch $\psi(x, \bar{c})$. Nun ist aber nach der Übung 2.1.4 der Typ $\mathrm{tp}(\bar{c}/Mb)$ ein Erbe von $\mathrm{tp}(\bar{c}/M)$. Es muß also ein $m \in M$ geben, das $\psi(x, \bar{c})$ realisiert, dieses m kann aber nur b selbst sein. Es folgt $b \perp_A b$, also $b \in \mathrm{acl}(A)$ (2.3.4) und p ist algebraisch. □

Beweis (von 3.5.1)
Durch Induktion über $\alpha = \mathrm{MR}(p)$. Wenn $\alpha = 0$, p also algebraisch ist, ist p trivialerweise intern (in jeder definierbaren Klasse). Wenn $\alpha > 0$, finden wir eine Realisierung b von p, ein $c \in \mathbb{F}$ und eine Parametermenge B, sodaß $b \perp B$ und $b \not\perp_B c$. Aus Stetigkeitsgründen können wir annehmen, daß B endlich ist. Sei nun D die kanonische Basis von $\mathrm{tp}(cB/\mathrm{acl}(b))$. Weil $cB \perp_D b$, aber $cB \not\perp b$, ist $b \not\perp D$.
Sei $(c_i B_i)$ eine unendliche Morleyfolge von $\mathrm{tp}(cB/D)$. Dann ist

$$D \subset \mathrm{dcl}(c_0 B_0 c_1 B_1 \ldots).$$

Aus $b \perp B$ (und $D \subset \mathrm{acl}(b)$) folgt $D \perp B$ und damit $D \perp B_0 B_1 \ldots$. Damit ist gezeigt, daß der Typ jedes Tupels $d \in D$ $\mathbb{F}$–intern ist (Lemma 3.4.1).
Wir wählen ein endliches Tupel $d \in D$ so, daß $b \not\perp d$. Dann ist $\mathrm{MR}(b/d) < \alpha$. Wenn wir den Parameter d zur Sprache hinzufügen und die Induktionsvoraussetzung auf $T(d)$ anwenden, gibt es eine Folge $b_0, \ldots, b_n = b$, sodaß $b_i \in \mathrm{dcl}(db)$ und die Typen $\mathrm{tp}(b_i/db_0 \ldots b_n)$ $\mathbb{F}$–intern sind. Wir wären jetzt fertig, wenn wir wüßten, daß $d \in \mathrm{dcl}(b)$.
Dazu ersetzen wir d durch den kanonischen Parameter d' der endlichen Menge $\{d_1, \ldots, d_k\}$ der Konjugierten von d über b. Wir haben dann $d' \in \mathrm{dcl}(b)$. Weil $d' \in \mathrm{dcl}(d_1 \ldots d_k)$ ist der Typ von d' $\mathbb{F}$–intern. Weil d' und d denselben algebraischen Abschluß haben, ist $\mathrm{MR}(b/d') = \mathrm{MR}(b/d) < \alpha$. Mit diesem d' können den Beweis zu Ende bringen. □

[4] Was wir definieren, heißt offiziell: p ist *fremd* zu $\mathbb{F}$. Wenn $\mathbb{F}$ streng minimal ist, ist das aber äquivalent zu der *Orthogonalität* von p und dem durch $\mathbb{F}$ bestimmten streng minimalen Typ.

Folgerung 3.5.5 (Baldwin [1])
ω_1–kategorische Theorien haben endlichen Morleyrang.

Der Morleyrang einer Theorie T ist der Morleyrang der Formel $x \doteq x$.

Beweis:
Wir können annehmen, daß es eine 0–definierbare streng minimale Menge $\mathbb{F}$ gibt. Wir nennen eine 0–definierbare partielle Funktion $f(\overline{u}, v_0, \ldots, v_{i-1}, w)$ und eine Formel $\psi(v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ ein *internes Schema* für $a_0, \ldots, a_i$, wenn

$$\models \psi(a_0, \ldots, a_i)$$

und

$$\models \exists w \, \forall v_i \, (\, \psi(a_0, \ldots, a_{i-1}, v_i) \longrightarrow \exists \overline{u} \in \mathbb{F} \; f(\overline{u}, a_0, \ldots, a_{i-1}, w) \doteq v_i) \, .$$

Die Folge $a_0, \ldots, a_i$ hat genau dann ein internes Schema, wenn $\mathrm{tp}(a_i/a_0 \ldots a_{i-1})$ $\mathbb{F}$–intern ist[5]. Ein *analysierendes Schema* für die Folge $a_0, \ldots, a_n$ ist eine Folge von internen Schemas für die Anfangsstücke der Folge.
Nun ist jedes Element a (aus der home sort) letztes Element eines Tupels, das ein analysierendes Schema hat. Eine Kompaktheitsüberlegung liefert uns die Existenz eines endlichen Vorrats von analysierenden Schemas mit denen alle Elemente auskommen. Insbesondere gibt es eine Schranke für die Länge der benötigten analysierenden Folgen. **Beweis noch unvollständig.** □

[5] Wir arbeiten in T^{eq}, um Tupel durch Elemente ersetzen zu können.

Kapitel 4

Hinweise zu den Übungen

Übung 1.1.1
Sei $A = \{a_i\}$ und $C = \{c_j\}$ eine Menge von neuen Konstanten. Betrachte die $L(C)$–Theorien

$$\begin{aligned} Ind &= \{\phi(\overline{d}) \leftrightarrow \phi(\overline{e}) \mid \overline{d}, \overline{e} \in C\} && (4.1) \\ Typ &= \{\phi(c) \mid M \models \phi(\overline{a}) \text{ für alle } \overline{a} \in A\} && (4.2) \end{aligned}$$

Dabei sind die ϕ L–Formeln und $\overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{a}$ aufsteigend indizierte Tupel. Mit Hilfe des Satzes von Ramsey sieht man, daß $T \cup Ind \cup Typ$ endlich erfüllbar ist. Wähle für $(N, b_j)_{j \in J}$ ein Modell von $T \cup Ind \cup Typ$.

Übung 1.4.1

1. Sei p algebraisch und $\phi \in p$ algebraisch. Wenn wir ϕ so wählen, daß die (endliche) Zahl der Realisierungen von ϕ minimal ist, wird p von ϕ isoliert.
2. Wenn p nicht algebraisch ist, wird jede endliche Teilmenge von p von unendlich vielen Elementen realisiert. Mit einem Kompaktheitsargument schließt man daraus, daß p unendlich viele Realisierungen hat,

Übung 1.4.2
Sei $\phi(M)$ minimal.

Wenn $\phi(M) \cap \psi(M, \overline{a})$ falls endlich durch k beschränkt und $\phi(M) \cap \neg\psi(M, \overline{a})$ durch l beschränkt ist, hat für alle $\overline{a} \in M$ die Menge $\phi(M) \cap \psi(M, \overline{a})$ oder die Menge $\phi(M) \cap \neg\psi(M, \overline{a})$ höchstens $\max\{k, l\}$ Elemente. Diese Aussage überträgt sich auf alle Modelle, die die Parameter enthalten. Also ist ϕ streng minimal.

Wenn es umgekehrt für $\psi(x, \overline{y})$ eine solche Schranke nicht gibt, gibt es für alle k ein $\overline{a} \in M$, sodaß beide, $\phi(M) \cap \psi(M, \overline{a})$ und $\phi(M) \cap \neg\psi(M, \overline{a})$ mehr als

k Elemente haben. In einer elementaren Erweiterung N gibt es also ein $\overline{a}$, sodaß $\phi(M) \cap \psi(M, \overline{a})$ und $\phi(M) \cap \neg\psi(M, \overline{a})$ unendlich sind und $\phi(x)$ ist nicht streng minimal.

<u>Übung</u> 1.5.1
Sei M ein Modell von T und $\overline{b}_1$,$\overline{b}_2$ zwei Tupel vom gleichen Typ. Wir müssen einen Automorphismus von M finden, der $\overline{b}_1$ in $\overline{b}_2$ überführt.

Wenn M überabzählbar ist, ist M saturiert und wir sind fertig. Sei also M abzählbar. Wenn m_0, die ϕ_0–Dimension des Primmodells, unendlich ist, ist M wiederum saturiert. Wir können also annehmen, daß m_0 endlich ist.

Wir wählen Primerweiterungen M_1 und M_2 von $\overline{b}_1$ und $\overline{b}_2$ und fixieren einen Isomorphismus zwischen M_1 und M_2, der $\overline{b}_1$ in $\overline{b}_2$ überführt. $\overline{a}_1 \in M_1$ sei ein Parameter für ϕ_0 und $\overline{a}_2$ sein Pendant in M_2. Weil die M_i endliche ϕ_0–Dimension haben, ist $\dim(M/M_1) = \dim(M/M_2)$. Sei $c_1^1, \ldots, c_1^n$ eine $\phi(x, \overline{a}_1)$–Basis von M über M_1 und $c_2^1, \ldots, c_2^n$ eine $\phi(x, \overline{a}_2)$–Basis über M_2. M ist dann minimale Primerweiterung von $M_1 c_1^1, \ldots, c_1^n$ und $M_2 c_2^1, \ldots, c_2^n$. Der Isomorphismus zwischen M_1 und M_2 setzt sich zu einem Isomorphismus zwischen $M_1 c_1^1, \ldots, c_1^n$ und $M_2 c_2^1, \ldots, c_2^n$ und dann zu einem Automorphismus von M fort.

<u>Übung</u> 1.6.1
Sei T ω–stabil und A abzählbar. Wähle Elemente b_i, sodaß $\mathrm{S}_1(A) = \{\mathrm{tp}(b_i/A) \mid i \in \omega\}$ und c_{ij}, sodaß $\mathrm{S}_1(Ab_i) = \{\mathrm{tp}(c_{ij}/Ab_i) \mid j \in \omega\}$. Dann ist $\mathrm{S}_2(A) = \{\mathrm{tp}(b_i c_{ij}/A) \mid j \in \omega\}$ abzählbar. Ebenso zeigt man, daß alle $\mathrm{S}_n(A)$ abzählbar sind.

Wenn es einen binären Baum von Formeln in n–Variablen gibt, gibt es einen abzählbare Teilsprache $L_0 \subset L$, für die die abzählbare Theorie $T_0 = T \restriction L_0$ nicht ω–stabil im Sinn von n–Typen ist. Es folgt, daß auch T_0 nicht ω–stabil ist. Also sind T_0 und T nicht total transzendent.

<u>Übung</u> 1.6.2
Sei M ein ω–saturiertes Modell und p ein Typ über M. $\phi(x, \overline{m}) \in p$ sei von minimalem Rang α und Grad n. Wenn $n > 1$, gibt es eine Formel $\psi(x, \overline{b})$, sodaß $\phi(x, \overline{m}) \wedge \psi(x, \overline{b})$ und $\phi(x, \overline{m}) \wedge \neg\psi(x, \overline{b})$ Morleygrad α haben. Wähle $\overline{a} \in M$ mit $\mathrm{tp}(\overline{a}/\overline{m}) = \mathrm{tp}(\overline{b}/\overline{m})$. Dann haben die beiden Formeln $\phi(x, \overline{m}) \wedge \psi(x, \overline{a})$ und $\phi(x, \overline{m}) \wedge \neg\psi(x, \overline{a})$ Rang α und eine der beiden Formeln gehört zu p. Das widerspricht der minimalen Wahl von $\phi(x, \overline{m})$.

<u>Übung</u> 2.1.1
Wenn $\psi(x, y)$ eine Folge von Elementen ordnet, ist ψ auch unstabil. Wenn $\phi(x, y)$ unstabil ist und $\models \phi(\overline{a}_i, \overline{b}_j) \iff i < j$ ordnet die Formel $\psi(x_1, x_2; y_1, y_2) = \phi(x_1, y_2)$ die Elemente $a_0 b_0, a_1 b_1, \ldots$.

ÜBUNG 2.1.2
Sei $A = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Wir betten I in ${}^{\mu}A$ ein, indem wir die Folgen aus I_0 konstant mit den Wert $\frac{1}{2}$ zu Folgen der Länge μ fortsetzen. Dann geben wir I die durch die lexikographische Ordnung von ${}^{\mu}A$ induzierte Ordnung.

ÜBUNG 2.1.3
a) $\Leftrightarrow$ d): Das wurde eigentlich schon im Beweis von 2.1.1 gezeigt. Allerdings nur für $|A| \geq |T|$. Man sieht aber sofort, daß T genau dann stabil ist, wenn die Einschränkung von T auf jede endliche Teilsprache von L stabil ist. Die Einschränkung an $|A|$ ist also überflüssig. Außerdem zeigt der Beweis, daß wir für unstabiles T ein A von jeder gewünschten Mächtigkeit finden können, für das $|\mathrm{S}_\phi(A)| > |A|$. Damit folgt auch sofort b) $\Rightarrow$ a).

d) $\Rightarrow$ c): Ein Typ $p \in \mathrm{S}(A)$ ist bestimmt durch die Familie aller p_ϕ. Also ist

$$|\mathrm{S}(A)| \leq \prod_\phi |\mathrm{S}_\phi(A)| \leq \prod_\phi |A| = |A|^{|T|}.$$

Wenn $|A| = \lambda$ und $\lambda^{|T|} = \lambda$, ist also $|\mathrm{S}(A)| \leq \lambda$.

c) $\Rightarrow$ b): Klar.

ÜBUNG 2.1.4
1): Die Formelmenge

$$r(x) = \{\phi(x, \overline{b}) \mid \overline{b} \in B,\ \ \phi(x, \overline{y})\ L(M)\text{–Formel}, \phi(x, \overline{m}) \in p \text{ für alle } \overline{m} \in M\}$$

ist endlich erfüllbar. Denn wenn die Konjunktion der $\phi_1(x, \overline{b}_1), \ldots, \phi_n(x, \overline{b}_n) \in r(x)$ inkonsistent wäre, müßte es auch $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_n \in M$ geben, für die die Konjunktion der $\phi_1(x, \overline{m}_1), \ldots, \phi_n(x, \overline{m}_n)$ inkonsistent wäre. Das geht aber nicht, weil die $\phi_i(x, \overline{m}_i)$ zu p gehören.
Jeder Typ $q(x) \in \mathrm{S}(B)$, der $r(x)$ enthält, ist ein Erbe von $p(x)$. (Beachte, daß $p \subset r$.)

2): Sei q ein Erbe von p und $\phi(x, \overline{b}) \in q$. Weil für kein $\overline{m} \in M$ die Formel $\phi(x, \overline{m}) \wedge \neg \mathrm{d}_p x \phi(x, \overline{m})$ zu p gehören kann, gehört $\phi(x, \overline{b}) \wedge \neg \mathrm{d}_p x \phi(x, \overline{b})$ nicht zu q. Also ist $\models \mathrm{d}_p x \phi(x, \overline{b})$. Das zeigt, daß q die nicht–forkende Erweiterung von p ist.

ÜBUNG 2.2.1
Wir beweisen nur Teil 1). Die Behauptung 2) ist klar.

Nehmen wir zuerst an, daß M Imaginäre eliminiert. Um 1a) zu zeigen, betrachten wir $X = \phi(M^k, a)$ für ein $a \in M^n$. Die Äquivalenzrelation

$$y_1 E y_2 \Longleftrightarrow \forall x\ \phi(x, y_1) \leftrightarrow \phi(x, y_2)$$

sei Faserung der 0–definierbaren Funktion $f : M^n \to M^m$. Setze $c = f(a)$. Dann ist

$$X = \left\{b \in M^k \mid M \models \exists y \; (f(y) \doteq c \wedge \phi(b, y))\right\}$$

über c definierbar. Andererseits ist

$$\{c\} = \{d \in M^m \mid (M, X) \models \exists y \; \left(f(y) \doteq d \wedge \forall x \, P(x) \leftrightarrow \phi(x, y)\right)\}.$$

Für 1b) betrachten wir die Partition

$$M^2 \quad = \quad \{a_0 a_1 \mid a_0 \neq a_1\} \cup \{aa \mid a \in M\}$$

ist Faserung einer 0–definierbaren Funktion $M^2 \to M^m$. Das liefert zwei 0–definierbare k–Tupel, also auch mindestens zwei 0–definierbare Elemente.

Für die Umkehrung nehmen wir an, daß 1a) und 1b) gelten. Sei $E \subset M^k \times M^k$ eine 0–definierbare Äquivalenzrelation. Für jede Äquivalenzklasse a/E gibt es ein Tupel c, sodaß a/E aus c definierbar ist und umgekehrt c aus dem Prädikat a/E. Es gibt also einerseits eine L–Formel $\phi_1(x; y)$ mit

$$M \models \forall x \left(\phi_1(x; c) \leftrightarrow xEa\right)$$

und andererseits ein $\phi_2(x; y)$ mit

$$M \models \forall x \left(xEa \to \forall y(\phi_2(x; y) \leftrightarrow y \doteq c)\right)$$

$\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ hat beide Eigenschaften, deren Konjunktion wir mit $\Phi_\phi(a; c)$ bezeichnen. Wenn M $|T|^+$–saturiert ist, muß es $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ geben, sodaß

$$M \models \forall x \exists y \bigvee_{i<n} \Phi_{\phi_i}(x; y).$$

Jedes $\phi(x; y)$ definiert eine Funktion $F_\phi : D_\phi \to M^{n_\phi}$, wobei

$$D_\phi = \{a \in M^k \mid M \models \exists y \, \Phi_\phi(a; y)\}.$$

D_ϕ besteht aus vollen Äquivalenzklassen und $E \cap D_\phi^2$ ist die Faserung von F_ϕ.

Wenn b ein 0–definierbares Tupel ist, können wir $\phi(x; y)$ ersetzen durch

$$\phi'(x; y, y') = \phi(x, y) \wedge b \doteq y'.$$

Auf diese Weise können wir erreichen, daß die Stelligkeit n_{ϕ_i} für alle $i < n$ die gleiche ist (sagen wir gleich n) und daß die Wertebereiche der F_{ϕ_i} disjunkt sind. Jetzt definiert

$$F(x) = \begin{cases} F_{\phi_0}(x) & \text{falls} \quad x \in D_{\phi_0} \\ F_{\phi_1}(x) & \text{falls} \quad x \in D_{\phi_1} \setminus D_{\phi_0} \\ \quad \vdots & \\ F_{\phi_{n-1}}(x) & \text{falls} \quad x \in D_{\phi_{n-1}} \setminus \left(D_{\phi_0} \cup \ldots \cup D_{\phi_{n-2}}\right) \end{cases}$$

eine Funktion $F : M^k \to M^n$ mit E als Faserung.

Übung 2.2.2

Sei $A \subset M$ genügend saturiert und q_1 und q_2 zwei Fortsetzungen von p auf

$\mathrm{acl}(A)$. $a_1, a_2 \in M$ seien Realisierungen von q_1 und q_2. Es gibt einen A–Automorphismus α von M, der a_1 in a_2 überführt. Weil $\alpha(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$, ist $\alpha(q_1) = q_2$.

<u>Übung</u> 2.2.3
Sei $p \in \mathrm{S}(A)$ algebraisch. Wenn p von $b \in \mathrm{dcl}(B)$ realisiert wird, ist $\mathrm{d}_p x\phi(x, \overline{y}) = \phi(b, \overline{y})$ eine gute Definition von p über B. Sei umgekehrt q eine Fortsetzung von p auf M. q wird in M durch ein b realisiert. Dann definiert $\mathrm{d}_q x(x \doteq y)$ die Menge $\{b\}$. Wenn q über B definierbar ist, ist also $b \in \mathrm{dcl}(B)$.

<u>Übung</u> 2.3.1
Wähle zuerst ein $A_1 \subset A$, das höchstens die Mächtigkeit $|T|$ hat und über dem p nicht forkt. Seien (p^i) alle nicht–forkenden Fortsetzungen von $p \restriction A_1$ auf A. Für jede L–Formel $\phi(y, \overline{y})$ gibt es nur endlich viele verschiedene p^i_ϕ. Es also eine endliche Teilmenge A_ϕ von A, sodaß für alle i

$$(p^i \restriction A_\phi)_\phi = (p \restriction A_\phi)_\phi \implies p^i_\phi = p_\phi.$$

Setze nun $A_0 = A_1 \cup \bigcup_\phi A_\phi$.

Wenn p Morleyrang hat, wählt man ein $\phi \in p$, das den gleichen Rang und Grad hat wie p. Ein A_0, das die Parameter von ϕ enthält, leistet das Gewünschte.

<u>Übung</u> 2.3.2
Sei $(p_\alpha)_{\alpha \in |T|^+}$ eine Kette von Typen $p_\alpha \in A_\alpha$. Die Vereinigung $\bigcup_{\alpha \in |T|^+} p_\alpha$ forkt nicht über einer Teilmengen A' von $\bigcup_{\alpha \in |T|^+} A_\alpha$, die höchstens die Mächtigkeit $|T|$ hat. Für genügend großes α ist A' in A_α enthalten. Die Kette forkt nicht mehr ab diesem Index.

<u>Übung</u> 2.3.3

$$\begin{array}{rcll} ab \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B & \iff & B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A ab & \text{Symmetrie} \\ & \iff & B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A a \ \& \ B \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Aa} b & \text{Transitivität und Monotonie} \\ & \iff & a \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B \ \& \ b \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Aa} B & \text{Symmetrie} \end{array}$$

<u>Übung</u> 2.3.4
Wegen Forkingstetigkeit können wir annehmen, daß B endlich ist. Außerdem sei A leer, das vereinfacht die Notation. Die Übung folgt dann aus der folgenden Behauptung durch Induktion:

<u>Behauptung</u>: Wenn B unabhängig ist und $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!|} B$, ist auch $B \cup \{b\}$ unabhängig.

Beweis: Sei $c \in B$. Dann folgt aus $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, B$, daß $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{B \setminus \{c\}} b$ (Symmetrie und Monotonie). Weil B unabhängig ist, ist $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, B \setminus \{c\}$. Transitivität liefert

$$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, B \setminus \{c\} \cup \{b\}.$$

Übung 2.3.5

Wir zeigen einen Spezialfall: (Der allgemeine Fall hat den gleichen Beweis.) *Das Paar $b_1 b_2$ sei unabhängig von C. Dann ist*

$$b_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, b_1 \iff b_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{C} b_2.$$

Beweis: Nach der letzten Übung (2.3.4) bedeuten beide Seiten der Äquivalenz, daß das Tripel $\{b_1, b_2, C\}$ unabhängig ist.
Für die Richtung von rechts nach links genügt es vorauszusetzen, daß b_1 und b_2 einzeln unabhängig von C sind.

Übung 2.4.1

Das ist eine Umformulierung von Übung 2.2.1.1. Man beachte, daß es dort für die Umkehrung genügt, Klassen der Form $X = a/E$ zu betrachten.

Übung 2.3.6

Alle stationären nicht–forkenden Fortsetzungen von $p = \mathrm{tp}(a/Ab)$ auf $\mathrm{acl}(A)b$ basieren auf $\mathrm{acl}(A)$. Es genügt also zu zeigen, daß p nur mit *einem* Typ $q \in \mathrm{S}(\mathrm{acl}(A))$ konsistent ist (nämlich mit $q = \mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{tp}(b/\mathrm{acl}(A))$. Dafür überlegen wir, daß $p(x)$ "weiß", daß x denselben Typ über $\mathrm{acl}(A)$ hat, wie b: Wenn nämlich a' eine zweite Realisierung von p ist, haben ab und $a'b$ denselben Typ über A, und die beiden Typen $\mathrm{tp}(ab/\mathrm{acl}(A))$ und $\mathrm{tp}(a'b/\mathrm{acl}(A))$ sind über A konjugiert. Also haben auch a' und b denselben Typ über $\mathrm{acl}(A)$.

Übung 3.1.1

Sei $p \in \mathrm{S}(A)$ und q eine nicht–forkende Fortsetzung auf B. Sei $\mathcal{I}$ ein Morleyfolge von q. Dann ist $\mathcal{I}$ unabhängig über B. Weil jedes einzelne Element von $\mathcal{I}$ unabhängig von B über A ist, ist $\mathcal{I}$ auch unabhängig über A (siehe Übung 2.3.5), als eine Morleyfolge von p.

Übung 3.1.2

3.1.2a): $\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_0$ ist unabhängig von B über A, also unabhängig über B. Die Elemente von $\mathcal{I}$ realisieren die nicht–forkende Erweiterung von p auf B.

3.1.2b): Sei B eine Erweiterung von A und q die nicht–forkende Fortsetzung von p. Wir setzen $\mathcal{I}$ zu einer Folge $\mathcal{I}'$ fort, die indiscernible über A ist und sehr lang. Dann ist $\mathcal{I}'$ immer noch eine Morleyfolge von p. Wenn wir jetzt also ein $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}'$ mit $B \mathop{\downarrow}_{A\mathcal{I}_0} \mathcal{I}'$ wählen mit $|\mathcal{I}_0| \leq |T| + |B|$, ist $\mathcal{I}' \setminus \mathcal{I}_0$ eine unendliche Morleyfolge von q mit dem gleichem Durchschnittstyp wie $\mathcal{I}$. Also ist $q \subset \mathrm{Av}(\mathcal{I})$.

Übung 3.1.3
Wenn $\mathcal{I}_0$ und $\mathcal{I}_1$ parallel sind, also $\mathcal{I}_0\mathcal{J}$ und $\mathcal{I}_1\mathcal{J}$ indiscernible sind, so ist

$$\mathrm{Av}(\mathcal{I}_0) = \mathrm{Av}(\mathcal{I}_0\mathcal{J}) = \mathrm{Av}(\mathcal{I}_1\mathcal{J}) = \mathrm{Av}(I_1).$$

Wenn umgekehrt $\mathfrak{p} = \mathrm{Av}(\mathcal{I}_0) = \mathrm{Av}(\mathcal{I}_1)$, so beachten wir, daß es (nach dem Beweis von 3.1.2) zwei Mengen B_0 und B_1 gibt, über denen $\mathfrak{p}$ nicht forkt, sodaß $\mathcal{I}_0$ und $\mathcal{I}_1$ Morleyfolgen der stationären Typen $\mathfrak{p} \restriction B_0$ und $\mathfrak{p} \restriction B_1$ sind. Sei $\mathcal{J}$ eine Morleyfolge von $\mathfrak{p} \restriction B_0\mathcal{I}_0B_1\mathcal{I}_1$. Dann sieht man, daß $\mathcal{I}_0\mathcal{J}$ und $\mathcal{I}_1\mathcal{J}$ Morleyfolgen von $\mathfrak{p} \restriction B_0$ und $\mathfrak{p} \restriction B_1$ sind.

Übung 3.1.4
p und q seien stationär mit (unendlichen) Morleyfolgen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$. Dann sind $\mathrm{Av}(\mathcal{I})$ und $\mathrm{Av}(\mathcal{J})$ die globalen nicht–forkenden Erweiterungen von p und q. p und q sind genau dann parallel, wenn $\mathrm{Av}\mathcal{I} = \mathrm{Av}\mathcal{J}$, d.h. wenn $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ parallel sind.

Übung 3.4.1
Der Beweis ist der gleiche wie für Lemma 3.4.3

Übung 3.4.2
Jeder Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F})$ induziert eine Permutation von $\mathbb{A}$. Fixiert man ein $e \in \mathbb{A}$, ist α durch den Wert $\alpha(e)$ eindeutig bestimmt: Es ist

$$\alpha(\pi(f, e)) = \pi(f, \alpha(e)).$$

Gibt man sich $e' \in \mathbb{A}$ vor, gibt es immer ein α, mit $\alpha(e) = e'$, weil e und e' denselben Typ über $\mathbb{F}$ haben. Dafür gibt es zwei Argumente: Erstens kann man beweisen, daß sich in stabilen Theorien jeder Isomorphismus zwischen Klassen der Form $\mathbb{F}B$ zu einem Automorphismus des Monstermodells $\mathbb{C}$ fortsetzen läßt. Zweitens kann man auch α einfach durch $\alpha(\pi(f, e)) = \pi(f, e')$ definieren. Daraus ergibt sich, daß $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}/\mathbb{F}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{A}/\mathbb{F})$ auf $\mathbb{A}$ lebt und über $\mathbb{F}$ definierbar ist.

Wie $\mathbb{G}$ operiert auch $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}/\mathbb{F})$ regulär auf $\mathbb{A}$. Außerdem kommutieren die beiden Operationen: Für alle $g \in G$, alle $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}/\mathbb{F})$ und alle $e \in \mathbb{A}$ ist $\alpha(ge) = g(\alpha e)$. Die Zuordnung $g \mapsto \alpha$, wenn $g^{-1}e_0 = \alpha e_0$, (für ein fest gewähltes $e_0 \in \mathbb{A}$) definiert in einer solchen Situation immer einen Gruppenisomorphismus.

Literaturverzeichnis

[1] John T. Baldwin. α_T is finite for $\aleph_1$–categorical T. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181:37–51, 1973.

[2] John T. Baldwin. *Fundamentals of Stability Theory.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer Verlag; Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988.

[3] Wilfried Hodges. *Model Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[4] Ehud Hrushovski. Unidimensional theories are superstable. *Ann. Pure Appl. Logic*, 50:117–138, 1990.

[5] Daniel Lascar. *Stability in Model Theory.* Longman, New York, 1987.

[6] M. Morley. Categoricity in power. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:514–538, 1965.

[7] Bruno Poizat. *Cours de Théorie des Modèles.* Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985.

[8] Bruno Poizat. *Groupes Stables.* Nur Al-Mantiq Wal-Mari'fah, Villeurbanne, 1987.

[9] Saharon Shelah. Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order-theories. *J. Symbolic Logic*, 37:107–113, 1972.

[10] Saharon Shelah. *Classification Theory.* North Holland, Amsterdam, 1978.

[11] Saharon Shelah. On uniqueness of prime models. *J. Symbolic Logic*, 43:215–220, 1979.

[12] Martin Ziegler. Stabilitätstheorie. Vorlesungsskript WS 88/89, Freiburg, 1989.

Index

Änderungen

Version 1 (15.7.1996)

Version 2 (27.7.1997)
Durchsicht von H. Scheuermann: Druckfehler. In 3.4.2 fehlte die Voraussetzung *total transzendent*.

Version 3 (5.8.1998)
Kleine Druckfehler wurden verbessert. Die Lösung der Übung 2.2.1 ist jetzt vollständig angegeben. Die fehlende Voraussetzung der Saturiertheit von M wurde hinzugefügt.

Version 4 (22.5.2000)
Kleine Druckfehler wurden verbessert.

Version 5 (17.10.2002)
Neben Druckfehlern wurde die Übung 2.1.4 verbessert.

Version 6 (18.3.2003)
Die Übung 3.4.1 wurde eingefügt.

Version 7 (15.10.2003)
Druckfehler in der Definition von M^{eq}. Fehlende Definitionen wurden eingefügt: konjugiert, Monstermodell. Der Beweis von Satz 1.2.1 wurde korrigiert.

Version 8 (20.11.2003)
Fußnote Seite 8. Bemerkung 1.3.1 korrigiert.

Version 9 (14. Februar 2004)
Fehler im Beweis von 1.3.2 korrigiert. Neue Übung 2.4.1. Druckfehler in 1.4, 1.6, Übung 2.2.1

Version 10 (4. Juli 2004)
Erläuterung im Beweis von 2.1.4. Index verbessert. Druckfehler. Übung 2.2.3 verbessert (für den Beweis von 2.3.4).

Version 11 (25. Oktober 2004)
Druckfehler. 1.2.5 verbessert.

Version 12 (31. Januar 2005)
Druckfehler im Beweis von 1.4.6. Beweis von 1.4.9 nachgetragen. Druckfehler in Abschnitt 1.6. Druckfehler in 2.1.2. Druckfehler im Hinweis für Übung 3.1.2. Druckfehler im Beweis von Lemma 3.2.4. Druckfehler in Abschnitt 3.4. Fehler im Beweis von 3.4.1. Korrektur in 3.5.2. Druckfehler im Beweis on 3.5.1. Verbesserung im Beweis von 3.5.3 und 3.5.5.

Version 12a (2. Februar 2005) Beweis von 3.5.5 korrigiert, aber noch unvollständig. Die dazugehörige Übung wurde gestrichen.

Version 13 (9. Mai 2005) Durchsicht von Immanuel Halupczok: Druckfehler. Bemerkung nach Übung 2.1.1 korrigiert.

Version 13b (15. November 2006) Verbesserung der Formeln in 1.6.7 und 1.6.8 nach einer Bemerkung von B. Link.