# Mathematik für Naturwissenschaftler*

Martin Ziegler

WS 1996/1997

## Literatur

[1] J.Hainzl. *Mathematik für Naturwissenschaftler*, volume 19 of *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik.* Teubner, 1977.

## Inhaltsverzeichnis



*Version 3c, Februar 2003

# 1 Kombinatorik

**Satz 1.1** *Eine $n$–elementige Menge hat $2^n$ viele Teilmengen.*

Als Formel:

$$\#\mathfrak{P}(A) = 2^{\#A}.$$

Dabei bezeichnet

$$\mathfrak{P}(A) := \{B \mid B \subset A\}$$

die Potenzmenge von $A$ und $\#A$ die Zahl der Elemente von $A$.

**Satz 1.2** *Sei $A$ eine Menge mit $n$–Elementen und $k$ eine Zahl zwischen $0$ und $n$. Dann gibt es*

$$n(n-1)\dots(n-k+1)$$

*viele Möglichkeiten aus den Elementen von $A$ eine $k$–elementige Folge ohne Wiederholungen auszuwählen.*

**Definition**

$$\binom{n}{k}$$

*bezeichnet die Zahl der $k$–elementigen Teilmengen $B$ einer $n$–elementigen Menge $B$.*

**Definition** *Die Fakultät von $n$ ist das Produkt*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Konvention: $0! = 1$

**Satz 1.3** *Eine $n$–elementige Menge läßt sich auf $n!$ verschiedene Arten anordnen.*

**Satz 1.4**

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

**Satz 1.5 (Pascalsches Dreieck)**

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

**Satz 1.6 (Binomische Formel)**

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

# 2 Folgen und Reihen

## 2.1 Folgen

**Definition** *Eine Zahlenfolge $a_0, a_1, \ldots$ heißt konvergent, wenn sie gegen einen Grenzwert $c$ konvergiert. Das bedeutet, daß in jeder noch so kleinen Umgebung von $c$ fast alle Folgenglieder liegen.*
*In Quantorenschreibweise:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N \; |a_n - c| < \epsilon$$

*Eine Folge ohne Grenzwert divergiert.*

Eine Zahlenfolge $(a_n)$ kann nur einen Grenzwert $c$ (oder Limes) haben.
Man schreibt dafür

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= c \\ a_n &\xrightarrow[n\to\infty]{} c \end{aligned}$$

Wenn eine Zahlenfolge $(a_n)$ darum divergiert, weil $a_n$ für genügend große $n$ beliebig groß wird, konvergiert sie gegen $\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall M \; \exists N \; \forall n \geq N \; M < a_n$$

Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

**Satz 2.1** *Eine beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent.*

**Satz 2.2 (Cauchysches Konvergenzkriterium)** *Eine Folge $(a_n)$ konvergiert genau dann, wenn die Differenzen $a_m - a_n$ für genügend große $m, n$ beliebig klein werden. Genauer, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; \forall n, m \geq N \; |a_m - a_n| < \epsilon$$

**Satz 2.3 (Rechenregeln)** *$(a_n)$ und $(b_n)$ seien zwei konvergente Folgen. Dann ist*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}
\end{aligned}$$

*In der letzten Gleichung muß man voraussetzen, daß die $a_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n$ ungleich Null sind.*

## 2.2 Reihen

Eine unendliche *Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \ldots$$

heißt konvergent, wenn die Folge $(s_n)$ der *Partialsummen*

$$s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

konvergiert. $\lim_{n\to\infty} s_n$ heißt die *Summe* der Reihe und wird ebenfalls mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

**Lemma 2.4** *Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, muß $(a_n)$ gegen Null konvergieren.*

Beispiel:

Die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

ist divergent. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

konvergiert.

Die Summe der Reihe

$$\mathrm{e} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

ist die Eulersche Zahl $\mathrm{e} = 2.718\ldots$.

**Definition** *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ der Absolutbeträge konvergiert.*

Beispiel:
Die *geometrische* Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

ist genau dann absolut konvergent, wenn $|x| < 1$. Die Summe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

**Satz 2.5 (Wurzelkriterium)** *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut, wenn es eine Zahl* $\delta$ *gibt mit*

1. $0 \leq \delta < 1$
2. $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \delta$ *für genügend große* $n$.

.

**Satz 2.6 (Quotientenkriterium)** *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert absolut, wenn es eine Zahl* $\delta$ *gibt mit*

1. $0 \leq \delta < 1$
2. $\left|\frac{an+1}{a_n}\right| \leq \delta$ *für genügend große* $n$.

.

**Definition** *Die Potenzreihe*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

*konvergiert absolut für alle* $x$. *Die dadurch durch dargestellte Funktion heißt Exponentialfunktion.*

**Satz 2.7**

$$\begin{aligned} \exp(0) &= 1 \\ \exp(1) &= \mathrm{e} \\ \exp(a+b) &= \exp(a)\exp(b) \end{aligned}$$

**Folgerung 2.8** $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

# 3 Stetige Funktionen

Sei $D$ eine Menge von reellen Zahlen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

**Definition** *$f$ heißt stetig bei $a \in D$, wenn $f(x)$ beliebig nahe bei $f(a)$ liegt, wenn nur $x$ genügend nahe bei $a$ liegt:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \ |x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

*$f$ heißt stetig, wenn $f$ bei allen $a \in D$ stetig ist*

Komposition (Hintereinanderausführung) $f \circ g$, Summe $f+g$, Produkt $fg$ und Quotient $\frac{f}{g}$ von Funktionen sind wie folgt erklärt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) \\ \frac{f}{g}(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

**Satz 3.1** *Komposition, Summe, Produkt und Quotient von stetigen Funktionen sind wieder stetig.*

**Lemma 3.2** *Wenn $f$ stetig ist und*

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$$

*dann ist auch*

$$f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

**Satz 3.3 (Mittelwertsatz)** *Eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ definierte stetige Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

**Satz 3.4 (Satz von Maximum)** *Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierte stetige Funktion hat ein Maximum*

$$f(x_0) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

# 4 Differentialrechnung

**Definition** *Sei $D$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar bei $a \in D$, wenn es eine Zahl $b$ gibt, sodaß der Differenzenquotient*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*beliebig nahe bei $b$ liegt, wenn $x$ genügend nahe bei $a$ liegt. In Quantorenschreibweise:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta \to \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - b\right| < \epsilon$$

*oder auch*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b.$$

*$f$ heißt differenzierbar, wenn $f$ bei allen $a\in D$ differenzierbar ist.*

$b$ heißt die Ableitung von $f$ bei $a$. Man schreibt für $b$ auch $f'(a)$. Die Funktion $f'$ ist die Ableitung von $f$. Man schreibt auch

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

$f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an der Kurve $y=f(x)$ im Punkt $(a,f(a))$. Die Gleichung der Tangente ist

$$f'(a)=\frac{y-f(a)}{x-a}.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(x^n)' &= nx^{n-1}\\ \exp'(x) &= \exp(x)\\ \sin'(x) &= \cos(x)\\ \cos'(x) &= -\sin(x)\\ \tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

**Satz 4.1 (Ableitungsregeln)**

1. $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
2. $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$ *(Kettenregel)*

**Folgerung 4.2 (Ableitung eines Quotienten)**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

**Satz 4.3 (Ableitung der Umkehrfunktion)** *Sei $g=h^{-1}$ Umkehrfunktion von $h$, das heißt*

$$g(h(x))=x$$

*für alle $x$. Dann ist*

$$g'(x)=\frac{1}{h'(g(x))}$$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist der *natürliche Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Umkehrfunktionen

| $f$ | $f^{-1}$ |
|---|---|
| sin | $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ |
| cos | $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ |
| tan | $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ |

**Folgerung 4.4**

$$\begin{aligned} \ln'(x) &= \frac{1}{x} \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Für beliebige positive $x$ ist $x^y$ definiert durch

$$x^y = \exp(\ln(x)y).$$

Es ist

$$\frac{\mathrm{d}x^y}{\mathrm{d}x} = yx^{y-1}.$$

Weil $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, ist zum Beispiel

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}^3}.$$

Der hyperbolische Sinus und Cosinus

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

und

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

haben die Ableitungen

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

und

$$\cosh'(x) = \sin(x).$$

# 5 Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ein stetige Funktion und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ des Intervalls. Für $i = 0, \ldots, n-1$ sei $f_i^{\max}$ das Maximum der Werte von $f$ auf $[x_i, x_{i+1}]$ und $f_i^{\min}$ das Minimum. Dann ist die Obersumme

$$\mathfrak{O}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^{\max} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

und die Untersumme

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^{\min} \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Wenn $\mathcal{Z}'$ ein Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ ist, gilt immer

$$\mathfrak{U}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \mathfrak{U}_{\mathcal{Z}'}(f) \leq \mathfrak{O}_{\mathcal{Z}'}(f) \leq \mathfrak{O}_{\mathcal{Z}}(f).$$

Man kann zeigen, daß die Differenz $\mathfrak{O}_{\mathcal{Z}}(f) - \mathfrak{U}_{\mathcal{Z}}(f)$ für genügend feine Zerlegungen beliebig klein wird. Daraus folgt

**Satz 5.1** *Es gibt ein eindeutig bestimmte Zahl $c$, sodaß für genügend feine $\mathcal{Z}$*

$$c - \epsilon \leq \mathfrak{U}_{\mathcal{Z}}(f) \leq c \leq \mathfrak{O}_{\mathcal{Z}}(f) \leq c + \epsilon.$$

*$c$ heißt das Integral von $f$ über $[a,b]$.*

Man schreibt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für $a < b$ setzt man

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

**Satz 5.2 (Charakteristische Eigenschaften des Integrals)**

1. $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, *wenn* $f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$.
3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

**Satz 5.3**

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

**Satz 5.4 (Dreiecksungleichung und Mittelwertsatz)**

1. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

2. *Es gibt immer ein* $\xi \in [a,b]$, *sodaß* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a)$.

**Definition** $F(x)$ *heißt Stammfunktion von* $f$, *wenn* $F'(x) = f(x)$.

Für festes $a$ ist

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Stammfunktion von $f$. Alle anderen Stammfunktionen von $f$ haben die Form $F(x)+c$. Man nennt deshalb $F(x)$ auch ein *unbestimmtes Integral* von $f$ und schreibt

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Definition** $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$

Es folgt

**Satz 5.5 (Hauptsatz der Integral– und Differentialrechnung)**

*Wenn* $F(x)$ *eine Stammfunktion von* $f(x)$ *ist, ist*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b.$$

**Satz 5.6 (Partielle Integration)**

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

**Satz 5.7 (Integration durch Substitution)**

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t$$

## Numerische Integration

Sei $a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b$ mit $x_i = a + i\frac{b-a}{N}$ eine gleichmäßige Unterteilung des Intervalls $[a,b]$ in $N$ Punkte. Dann läßt sich $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ näherungsweise berechnen durch die

Sehnen–Trapezregel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2N}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\right)$$

und für gerades $N$ durch die (bessere)

Simpsonregel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$
$$\frac{b-a}{3N}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+4f(x_{N-1})+f(x_N)\right).$$

Für $N=2$ ergibt sich die Keplersche Faßregel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)\right).$$

# 6 Taylorreihen

Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f$ schreiben wir

$$f^{(n)}(x)$$

für die $n$–te Ableitung von $f(x)$.

**Definition** *Die Taylorreihe von $f(x)$ im Punkt $a$ ist die Potenzreihe*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots.$$

Wenn $f(x)$ in einer Umgebung von $a$ durch eine konvergente Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ dargestellt wird, ist $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ die Taylorreihe von $f$ im Punkt $a$.
Wenn die hohen Ableitungen von $f$ nicht zu groß sind, konvergiert die Taylorreihe von $f$ bei $a$ und stellt in einer Umgebung von $a$ die Funktion $f(x)$ dar. Es gilt nämlich:

**Satz 6.1 (Restgliedabschätzung der Taylorreihe)** *Wenn der Betrag der $(n+1)$–ten Ableitung von $f$ zwischen $a$ und $x$ durch $M$ beschränkt ist, gilt die Abschätzung*

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Beispiele:
Die Taylorreihe von $\exp(x)$ in 0 ist die überall konvergente Reihe

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Die Taylorreihe von $\sin(x)$ in 0 ist die überall konvergente Reihe

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots..$$

Ebenso konvergiert die Taylorreihe des Cosinus für alle $x$ gegen $\cos(x)$:

$$\cos(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots.$$

Die Taylorreihe von $\frac{1}{x}$ in 1 stellt die Funktion im Intervall $(0, 2)$ dar:

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$$

Daraus ergibt sich durch Integration die im selben Intervall konvergente Potenzreihe des Logarithmus:

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots.$$

# 7 Polynome und rationale Funktionen

**Definition** *Ein Polynom ist eine Funktion der Form*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

*Wenn $a_n \neq 0$, hat $f(x)$ den* Grad *$n$.*

## 7.1 Bestimmen von Nullstellen

**Satz 7.1** *Sei $f(x) = x^2 + px + q$. Wenn $p^2 - 4q \geq 0$, hat $f(x)$ die beiden Nullstellen*

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \xi_2 &= -\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

Für Gleichungen von größerem Grad als 4 gibt es keine derartigen Formeln. Man verwendet das *Newtonverfahren*:
Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion und $\xi_0$ in der Nähe einer Nullstelle von $f$. Dann ist

$$\xi_1 = \xi_0 - \frac{f(\xi_0)}{f'(\xi_0)}$$

im allgemeinen eine bessere Näherung. Die Folge $\xi_0, \xi_1, \ldots$, wobei

$$\xi_{i+1} = \xi_0 - \frac{f(\xi_i)}{f'(\xi_i)}$$

konvergiert schnell gegen eine Nullstelle von $f$.

## 7.2 Interpolation durch Polynome

**Lemma 7.2** *Wenn $\xi$ Nullstelle von f(x) ist, kann man $f(x)$ schreiben als*

$$(x - \xi)q(x)$$

*für ein Polynom $g(x)$.*

**Folgerung 7.3** *Ein Polynom $n$-ten Grades hat höchstens $n$ Nullstellen.*

**Satz 7.4 (Langrangesche Interpolationsformel)** *$\xi_0, \ldots, \xi_n$ seien paarweise verschiedene Zahlen. Dann ist*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \left( \zeta_i \prod_{j \neq i} \frac{x - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right)$$

*ein Polynom $n$–ten Grades, das an den Stellen $\xi_0, \ldots, \xi_n$ die Werte $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ annimmt.*

## 7.3 Komplexe Zahlen

**Definition** *Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen besteht aus allen formalen Summen*

$$z = a + b\mathrm{i},$$

*für reelle Zahlen $a$ und $b$. Addition und Multiplikation sind erklärt durch*

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + a') + (b + b')\mathrm{i} \\ z \cdot z' &= (aa' - bb') + (ab' + a'b)\mathrm{i} \end{aligned}$$

Es gelten dir gleichen Rechengesetze wie für reelle Zahlen. Darüber hinaus hat man:
Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} &= -1 \\ (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) &= a^2 + b^2 \\ (a + b\mathrm{i})^{-1} &= \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$|a + b\mathrm{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist der *Betrag* von $a + b\mathrm{i}$.

Setzt man komplexe Zahlen in die Potenzreihe für $\exp(x)$ ein, ergibt sich

**Satz 7.5** *Für reelle Zahlen $b$ ist*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \cos(b) + \sin(b)\mathrm{i}$$

**Folgerung 7.6**

$$\mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{a}(\cos(b) + \sin(b)\mathrm{i})$$

**Satz 7.7 (Hauptsatz der Algebra)** *Jedes nicht–konstante Polynom hat eine komplexe Nullstelle.*

**Folgerung 7.8** *Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten zerfällt in ein Produkt von linearen Polynomen.*

## 7.4 Rationale Funktionen

**Definition** *Ein Quotient*

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

*von zwei Polynomen ist eine rationale Funktion.*

Der folgende Satz gestattet es Stammfunktionen von rationalen Funktionen zu aufzufinden.

**Satz 7.9 (Partialbruchzerlegung)** *Jede rationale Funktion ist eine Summe eines Polynoms und Funktionen der Form*

$$\frac{b}{(x-a)^n}$$

*für komplexe Zahlen $a, b$.*

# 8 Fourierreihen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *periodisch* (mit Periode $2\pi$), wenn für alle $x$

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

**Satz 8.1** *Eine stückweise differenzierbare*[1] *periodische Funktion $f(x)$ läßt sich durch eine Fourierreihe darstellen:*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) .$$

Um genau zu sein: Die Fourierreihe muß an den Unstetigkeitsstellen $a$ von $f$ nicht gegen $f(a)$ konvergieren.

**Satz 8.2** *Die Koeffizienten der Fourierreihe berechnen sich so ($k > 0$):*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

BEISPIEL:

Die periodische Sägezahnfunktion, für die $f(x) = x$ im Intervall $(-\pi, \pi)$, hat die Fourierreihe

$$2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots\right).$$

[1] Siehe [1, S.160] für eine präzise Formulierung

# 9 Vektorrechnung

## 9.1 Vektorräume

Sei ein Punkt O im dreidimensionalen Anschauungsraum $\mathcal{A}$ fixiert. Ein *Vektor* ist eine gerichtete Strecke $\overrightarrow{\mathrm{O}P}$ mit Anfangspunkt O(und Endpunkt $P$).

Zwei Vektoren $\overrightarrow{\mathrm{O}P}$ und $\overrightarrow{\mathrm{O}Q}$ werden addiert, indem man die Punkte $\mathrm{O}, P, Q$ zu einem Parallelogramm $\mathrm{O}, P, Q, S$ ergänzt:

$$\overrightarrow{\mathrm{O}S} = \overrightarrow{\mathrm{O}P} + \overrightarrow{\mathrm{O}Q}$$

$0 = \overrightarrow{\mathrm{OO}}$ ist der *Nullvektor*. Der zu $u$ *inverse* Vektor $-u$ hat die gleiche Länge wie $u$, aber die entgegengesetzte Richtung.

Für Vektoren $u$,$v$,$w$ gelten die Rechenregeln

(A1) $u + v = v + u$

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(A3) $0 + v = v$

(A4) $v + (-v) = 0$

Sei $\alpha$ ein reelle Zahl und $v$ ein Vektor. Der Vektor $\alpha \cdot v$ hat die gleiche Länge wie $v$, aber die $\alpha$–fache Länge. Wenn $\alpha$ negativ ist, kehrt sich auch die Richtung um.

Rechenregeln der Skalarmultiplikation

(M1) $1 \cdot v = v$

(M2) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$

(M3) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v \; + \; \beta \cdot v$

(M4) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v \; + \; \alpha \cdot w$

Eine Menge, auf der eine Addition[2] erklärt ist und deren Elemente man mit reellen Zahlen multiplizieren kann, sodaß die Axiome A1–A4 und M1–M4 gelten, nennt man einen *Vektorraum*.

Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

ist mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Vektorraum. Man schreibt die Elemente von $\mathbb{R}^3$ auch als Spalten– oder Zeilenvektoren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad (x_1 \; x_2 \; x_3)$$

[2] mit einem Nullelement und einer Inversenoperation

Man definiert analog $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und allgemein $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{A}$ als Vektorraum aufgefaßt und $\mathbb{R}^3$ sind *drei–dimensional* in folgendem Sinn: Es gibt drei Vektoren $b_1$, $b_2$, $b_3$ sodaß sich jeder Vektor schreiben läßt als

$$v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3.$$

für eindeutig bestimmte $\alpha_i \in \mathbb{R}$. $b_1, b_2, b_3$ heißt *Basis* des Vektorraums. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind die *Koordinaten* von $v$ (bezüglich der Basis $b_1, b_2, b_3$). Eine Basis heißt daher auch *Koordinatensystem*.
Der $\mathbb{R}^3$ hat die *kanonische* Basis

$$\mathrm{e}_1 = (1,0,0) \qquad \mathrm{e}_2 = (0,1,0) \qquad \mathrm{e}_3 = (0,0,1).$$

Ein Isomorphismus zwischen zwei Vektorräumen $U$ und $V$ ist eine Bijektion $f : U \to V$, die sich mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträgt:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) &= \alpha f(u) \end{aligned}$$

**Satz 9.1** *Jeder drei–dimensionale Vektorraum ist isomorph zu* $\mathbb{R}^3$.

## 9.2 Skalarprodukt

Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren in $\mathcal{A}$ ist die Zahl

$$\overrightarrow{\mathrm{O}P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}Q} = \cos(\phi)\, \|\overrightarrow{\mathrm{O}P}\|\, \|\overrightarrow{\mathrm{O}Q}\|,$$

wobei $\phi$ der Winkel $\angle(P, \mathrm{O}, Q)$ zwischen den beiden Vektoren ist und $\|\overrightarrow{\mathrm{O}P}\|$, $\|\overrightarrow{\mathrm{O}Q}\|$ ihre Längen sind.

Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften:

(S1) $u \cdot v = v \cdot u$

(S2) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

(S3) $u \cdot (\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (u \cdot v)$

(S4) $u \cdot u \geq 0$

(S5) $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$u \cdot v = 0$ genau dann, wenn $u$ senkrecht auf $v$ steht.

Definiert man auf dem $\mathbb{R}^n$ das Produkt

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n,$$

so sind die Eigenschaften S1–S4 ebenfalls erfüllt.

Man definiert für Räume mit Skalarprodukt die Länge eines Vektors durch:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

**Lemma 9.2 (Schwarzsche Ungleichung)**

$$|u \cdot v| \;\leq\; \|u\|\,\|v\|$$

**Folgerung 9.3 (Dreiecksungleichung)**

$$\|u + v\| \;\leq\; \|u\| + \|v\|.$$

**Definition** *Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Eine Orthonormalbasis ist eine Basis $b_1, b_2 \ldots, b_n$ mit*

$$b_i \cdot b_j = \begin{cases} 1 \text{ wenn } i = j \\ 0 \text{ wenn } i \neq j \end{cases}$$

Jeder endlich–dimensionale Vektorraum hat eine Orthonormalbasis. Das ist leicht für den Anschauungsraum $\mathcal{A}$ zu sehen. Die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ ist orthonormal.

**Lemma 9.4** *Sei $V$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $b_1, b_2 \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis. Dann berechnet sich das Skalarprodukt von $u = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$ und $v = \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_n b_n$ als*

$$u \cdot v = \alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n.$$

## 9.3 Kreuzprodukt

Das *Kreuzprodukt*

$$u \times v$$

zweier Vektoren des Anschauungsraums ist ein Vektor des durch folgende Eigenschaften bestimmt ist:

1. $\|u \times v\| \;=\; \sin(\phi)\,\|u\|\,\|v\|$, wobei $\phi$ der Winkel zwischen $u$ und $v$ ist (von $u$ nach $v$ gezählt).
2. $u \times v$ steht senkrecht auf $u$ und $v$.
3. $u$, $v$ und $u \times v$ bilden ein *Rechtssystem* [3] .

$\|u \times v\|$ ist der Flächeninhalt des von $u$ und $v$ aufgespannten Parallelogramms.

Rechenregeln

(K1) $u \times v = -v \times u$

[3] wie Mittelfinger, Daumen und Zeigefinger der rechten Hand (wenn $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$)

(K2) $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$

(K3) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$

$u \times v = 0$ genau dann, wenn $u$ und $v$ parallel sind.

**Definition** *$(u \times v) \cdot w$ ist das Spatprodukt von $u$, $v$ und $w$.*

Der Betrag von $(u \times v) \cdot w$ ist das Volumen des von $u$, $v$ und $w$ aufgespannten Parallelepiped. $(u \times v) \cdot w$ ist genau dann positiv, wenn $u$, $v$ und $w$ ein Rechtssystem bilden.

Wenn $b_1, b_2, b_3$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{A}$ ist, die ein Rechtssystem bildet, drückt sich das Kreuzprodukt in den Koordinaten so aus

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2 \end{pmatrix}.$$

# 10 Lineare Abbildungen

**Definition** *Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der Form*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

*heißt linear.*

Eine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist linear, wenn sie für ein fest gewähltes Koordinatensystem einer linearen Abbildung der Koordinaten entspricht. Der Begriff hängt nicht von der Wahl der Basis ab.

Eine *Gerade* in $\mathbb{R}^3$ ist eine Menge der Form

$$G = \{u_0 + \alpha v_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

**Lemma 10.1** *Eine lineare Abbildung bildet Geraden in Geraden ab.*

Das Zahlenschema

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

durch das

$$f = f_A$$

in (1) definiert wird, heißt $3 \times 3$–Matrix. Die Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

von $A$ sind die Bilder

$$f(\mathrm{e}_1)\,, \quad f(\mathrm{e}_2) \quad \text{und} \quad f(\mathrm{e}_3)$$

der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$.

### Matrixoperationen

Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Matrizen, $c = (c_i)$ ein Spaltenvektor und $\alpha$ eine Zahl.

<u>Matrixaddition</u>

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

<u>Skalarmultiplikation</u>

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

<u>Multiplikation</u>

$$AB = \left( \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} \right)$$

<u>Multiplikation mit einer Spalte</u>

$$Ac = \left( \sum_{k=1}^{3} a_{ik} c_k \right)$$

$A + B$, $\alpha A$ und $AB$ sind wieder Matrizen, $Ac$ ist ein Spaltenvektor.
Matrixoperationen entsprechen Operationen der durch sie dargestellten linearen Abbildungen. Es ist

- $f_{A+B} = f_A + f_B$
- $f_{\alpha A} = \alpha f_A$
- $f_{AB} = f_A \circ f_B$
- $f_A(c) = Ac$

### Rechenregeln

Die Matrizen bilden unter der Addition und Skalarmultiplikation einen $3 \cdot 3$–dimensionalen Vektorraum. Zusätzlich gilt

$$\begin{array}{ll}
\text{(MA1)} & A(B + C) = AB + AC \\
\text{(MA2)} & (A + B)C = AB + BC \\
\text{(MA3)} & A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB) \\
\text{(MA4)} & A(BC) = (AB)C \\
\text{(MA5)} & A\mathrm{E} = \mathrm{E}A = A
\end{array}$$

Dabei ist

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die (3–dimensionale) Einheitsmatrix.

$A$ heißt *invertierbar*, wenn es ein $B$ mit $AB = BA = \mathrm{E}$ gibt.

$$B = A^{-1}$$

ist eindeutig bestimmt und heißt die *Inverse* von $A$.

<u>Verallgemeinerung:</u> Lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

werden beschrieben durch $m \times n$–Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

# 11 Lineare Gleichungssysteme

**Definition** *Die Determinante einer* $2 \times 2$*–Matrix* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *ist*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Alternative Schreibweise:

$$\det A = |A|$$

**Satz 11.1 (Cramersche Regel für n=2)** *Wenn* $\det A \neq 0$*, hat das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

*die Lösung*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

*Wenn* $\det A = 0$*, gibt es keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.*

Die Cramersche Regel läßt sich für lineare Gleichungssysteme mit beliebig vielen Variablen formulieren. Zunächst definiert man die Determinante von beliebigen quadratischen Matrizen durch den folgenden Satz:

**Satz 11.2** *Es gibt genau eine Funktion* det*, die jeder* $n \times n$*–Matrix* $A$ *eine Zahl* $\det A$ *zuordnet und die folgenden Eigenschaften hat:*

(D1) det *ist als Funktion jeder Spalte jeweils eine lineare Abbildung* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(D2) $\det A$ *ist Null, wenn* $A$ *zwei gleiche Spalten hat.*

(D3) $\det \mathrm{E} = 1$

(Man schreibt wieder $|A|$ für $\det A$.)

Zum Beispiel ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{2}$$

schreibt man als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$Ax = b.$$

**Satz 11.3 (Cramersche Regel)** *Wenn* $\det A \neq 0$*, hat das Gleichungssystem* $Ax = b$ *die Lösung*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ \ldots\ldots\ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

*wobei* $A_i$ *aus* $A$ *entsteht, indem die* $i$*–te Spalte durch* $b$ *ersetzt wird.*
*Wenn* $\det A = 0$*, gibt es keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.*

Praktischer als die Cramersche Regel ist das folgende Eliminationsverfahren: Man schreibt (2) als ein Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Durch Anwenden von *Zeilenoperationen*auf dieses Schema erhält man äquivalente Gleichungssysteme:

- Addiere ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile.

- Multipliziere eine Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl.

Wenn man zusätzlich erlaubt, daß im linken Teil des Schemas Spalten vertauscht werden (das heißt, daß die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ umnumeriert werden), kann man (2) auf die Normalform

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & c_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n \end{array}\right)$$

bringen.
$r$ heißt der *Rang* des Gleichungssystems. $r$ hängt nur von der Matrix $A$ ab und nicht von den im einzelnen ausgeführten Zeilenoperationen.
$A$ hat genau dann den maximalen Rang $n$, wenn $\det A \neq 0$. In diesem Fall ist $(c_1, \ldots, c_n)$ die Lösung von (2).
Wenn $r < n$, ist (2) genau dann lösbar, wenn $c_{r+1} = \cdots = c_n = 0$. Man kann dann sich dann die Werte von $x_{r+1}, \cdots, x_n$ beliebig vorgeben und erhält eine $n - r$–parametrige Lösungsgesamtheit.

Wenn man das Schema

$$(A|\mathrm{E})$$

durch Zeilenoperationen umformt in

$$(E|B)$$

ist $B = A^{-1}$.

# 12 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

**Definition** *Eine Folge $a_0, a_1, \ldots$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ heißt konvergent, wenn sie gegen einen Grenzwert $c \in \mathbb{R}^n$ konvergiert:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N \; \|a_n - c\| < \epsilon$$

**Definition** *$f$ heißt stetig bei $a \in D$, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \;\; \|x - a\| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

*$f$ heißt stetig, wenn $f$ bei allen $a \in D$ stetig ist*

Die Sätze 3.1, 3.2, 3.4 gelten sinngemäß für stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$.

**Definition** *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt partiell differenzierbar, wenn für alle $(a_1, \ldots, a_n)$ aus dem Definitionsbereich die einstelligen Funktionen*

$$f(x_1, a_2, \ldots, a_n), \quad f(a_1, x_2, \ldots, a_n), \ldots, f(a_1, \ldots, x_n)$$

*differenzierbar sind. Man schreibt*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

*für die respektiven* partiellen *Ableitungen.*

Alternative Schreibweise:

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) \end{pmatrix}$$

hat die Richtung des stärksten Wachstums von $f$. Eine andere Bezeichnung ist

$$\operatorname{grad} f,$$

der *Gradient* von $f$.

Eine *Kurve* im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $c = (c_1, \ldots, c_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, deren Komponentenfunktionen $c_i$ stetig sind.

**Satz 12.1 (Kettenregel)** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar und $c$ eine Kurve mit differenzierbaren Komponentenfunktionen. Dann ist*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(c_1(x), \ldots, c_n(x))}{\mathrm{d}x} &= \\ = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1(x)) \ldots, c_n(x)) \frac{\mathrm{d}c_1(x)}{\mathrm{d}x} &+ \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(c_1(x)) \ldots, c_n(x)) \frac{\mathrm{d}c_n(x)}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

**Lemma 12.2** *Sei $f$ auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definiert und partiell differenzierbar. Wenn $f$ bei $a$ ein lokales Minimum oder Maximum hat, verschwinden alle partiellen Ableitungen bei $a$.*

**Lemma 12.3** *Wenn $f$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, spielt die Reihenfolge der Differentiation keine Rolle:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Die *Taylorentwicklung* von $f$ ist die unendliche Reihe

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_f(t_1, \ldots, t_n) \quad &= \quad f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, t_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a)\, t_{i_1} t_{i_2} + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(a)\, t_{i_1} \ldots t_{i_k} + \ldots \end{aligned}$$

Wenn $f(x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom ist, wird $f$ in jedem Punkt durch seine Taylorreihe dargestellt. Wenn $f$ den Grad $k$ hat, bricht die Taylorreihen beim Grad $k$ ab.

**Definition** *Eine $n$–dimensionale quadratische Form in $n$–Variablen ist ein homogenes quadratisches Polynom $q(t_1, \ldots, t_n)$. Das heißt, daß $q$ durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ in der Form*

$$q_A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} t_j t_j$$

*gegeben ist.*

Wir können immer annehmen, daß die Matrix $A$ *symmetrisch* ist: $a_{ij} = a_{ji}$.

Die *Hessesche Form* einer zweimal differenzierbaren Funktion in $a$ ist das 2–fache des quadratischen Teils der Taylorreihe in $a$:

$$\mathrm{H}_f(a) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(a)\, t_{i_1} t_{i_2}.$$

**Definition** *Ein quadratische Form $q$ ist*

- *positiv definit, wenn $q(b) > 0$ für alle $b \neq 0$*
- *negativ definit, wenn $q(b) < 0$ für alle $b \neq 0$*
- *indefinit, wenn $q$ positive und negative Werte annimmt.*

**Lemma 12.4** *Eine zweidimensionale quadratische Form $q_A$ ist genau dann (positiv oder negativ) definit, wenn* $\det A > 0$, *und genau dann indefinit, wenn* $\det A < 0$. *Wenn* $\det A > 0$ *ist $A$ genau dann positiv definit, wenn $a_{11}$ (oder $a_{22}$) positiv ist.*

**Satz 12.5** *Sei $f$ auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definiert und partiell stetig differenzierbar. Sei $a$ ein Punkt, an dem die ersten partiellen Ableitungen verschwinden. Wenn dann die Hessesche Form $H_f(a)$*

- *positiv definit ist, hat $f$ bei $a$ ein lokales Minimum,*
- *negativ definit ist, hat $f$ bei $a$ ein lokales Maximum,*
- *indefinit ist, hat $f$ bei $a$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum. ($f$ hat dann einen* Sattelpunkt.*)*

Zum Beweis braucht man:

**Satz 12.6 (Hauptachsentransformation)** *Für jede $n$–dimensionale quadratische Form $q$ läßt sich eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ so wählen, daß $q$ in den neuen Koordinaten die Gestalt*

$$\lambda_1 t_1^2 + \ldots + \lambda_n t_n^2$$

*hat*

Die neuen Basisvektoren sind die *Hauptachsen* von $q$. Die $\lambda_i$ sind eindeutig bestimmt und heißen *Eigenwerte* von $q$. $q$ ist genau dann positiv (negativ) definit, wenn alle $\lambda_i$ positiv (negativ) sind. Und genau dann indefinit, wenn es einen positiven und einen negativen Eigenwert gibt.

Man kann 12.2 und 12.5 verwenden um das folgende Problem zu lösen:
In der Ebene seien die Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeben. Gesucht ist die *Regressionsgerade* $y = ax + b$, für die die Summe

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$$

der Fehlerquadrate minimal wird.

Lösung

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{d}\Big(n\sum_i (x_i y_i) - \Big(\sum_i x_i\Big)\Big(\sum_i y_i\Big)\Big) \\
b &= \frac{1}{d}\Big(\Big(\sum_i x_i^2\Big)\Big(\sum_i y_i\Big) - \Big(\sum_i x_i y_i\Big)\Big(\sum_i y_i\Big)\Big) \\
&\phantom{=}\ \text{wobei} \\
d &= n\sum_i x_i^2 - \Big(\sum_i x_i\Big)^2.
\end{aligned}$$

## 13 Kurven– und Bereichsintegrale

Eine *Differentialform* ist eine stetige Abbildung $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \omega_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \omega_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

die wir als

$$\omega_1 \mathrm{d}x_1 + \ldots + \omega_n \mathrm{d}x_n$$

notieren.

Entlang einer stückweise differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ läßt sich eine Differentialform $\omega$ integrieren:

$$\int_c \omega = \int_a^b (\ \omega_1(c(t))\, c_1'(t) + \ldots + \omega_n(c(t))\, c_n'(t)\ )\, \mathrm{d}t$$

**Definition** *$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $\omega$, wenn*

$$\omega = \mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

*Eine Differentialform, die eine Stammfunktion hat, heißt* exakt.

**Satz 13.1** *Wenn $\omega$ eine Stammfunktion $F$ hat, ist für jede Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_c \omega = F(c(b)) - F(c(a)).$$

Eine Differentialform ist genau dann exakt, wenn Kurvenintegrale nur von Anfangs– und Endpunkt der Kurve abhängen. Die Stammfunktion läßt sich dann als

$$F(x) = \text{Integral von } \omega \text{ entlang einer Kurve von } 0 \text{ bis } x$$

finden.

**Definition** *$\omega$ heißt geschlossen, wenn*

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$$

*für alle $i, j$.*

**Satz 13.2** *Eine Differentialform ist genau dann exakt, wenn sie geschlossen ist.*

Der Satz gilt für auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$ definierte Differentialformen und allgemeiner für "einfach zusammenhängende"Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Der Satz ist zum Beispiel falsch, wenn $\omega$ nur auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erklärt ist.
Beweisansatz:
Sei zum Beispiel $\omega$ eine geschlossene Differentialform auf $\mathbb{R}^2$. Fixiere einen Punkt $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$F(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} \omega_1(s, a_2)\,\mathrm{d}s + \int_{a_2}^{y} \omega_2(x, t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von $\omega$.

**Definition** *Sei $F$ eine beschränkte (nicht allzu wilde) Fläche im $\mathbb{R}^2$ und $f : F \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion. Dann ist*

$$\int_F f \;\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

*das Volumen des Körpers*

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in F,\ 0 \le z \le f(x, y)\}.$$

Wenn $f$ negative Werte hat zählt man das Volumen negativ. Für eine präzise Definition überdeckt man $F$ durch disjunkte kleine Rechtecke $R_i$ und approximiert das Integral durch

$$\sum_i \text{Volumen}(R_i) f_i,$$

wobei $f_i$ ein Wert ist, den $f$ auf $R_i$ annimmt. (Siehe Abschnitt 5.)

Allgemeiner definiert man für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und gutartige Teilmengen $V \in \mathbb{R}^n$ das Integral

$$\int_V f \;\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Sei $\omega$ eine Differentialform auf dem $\mathbb{R}^2$. Definiere

$$\operatorname{rot}\omega = \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}$$

**Satz 13.3 (Satz von Stokes: Spezialfall)** *Sei $c$ eine geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^2$, die eine Fläche $F$ im negativen Uhrzeigersinn umläuft. Dann ist*

$$\int_c \omega = \int_F \operatorname{rot}\omega \,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

**Satz 13.4 (Satz von Fubini)** *Sei $R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ ein Quader im $\mathbb{R}^n$ und $f : R \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist*

$$\int_R f \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left( \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) \,\mathrm{d}x_1 \ldots \right) \mathrm{d}x_{n-1} \right) \mathrm{d}x_n.$$

# 14 Differentialgleichungen

Wir behandeln *gewöhnliche* Differentialgleichungen. Gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmen eine Funktion $f(x)$ einer Variable $x$ durch eine Gleichung zwischen $x$, dem Funktionswert $f(x)$ und den Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$,.... *Partielle* Differentialgleichungen werden für Funktionen mehrerer Variable aufgestellt. Wir können hier nur Differentialgleichungen *erster Ordnung* behandeln.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung enthält nur die erste Ableitung der gesuchten Funktion. Sie hat gewöhnlich die Form

$$y' = g(x, y) \tag{3}$$

für eine stetig differenzierbare Funktion $g$. Eine Lösung ist eine Funktion $f(x)$, sodaß für alle $x$ im Definitionsbereich

$$f'(x) = g(x, f(x)).$$

Die Gleichung (3) hat im allgemeinen eine ein–parametrige Schar von Lösungen. Die Lösung wird eindeutig, wenn man eine *Anfangsbedingung*

$$y(a) = b \tag{4}$$

vorgibt. Man fordert also $f(a) = b$.

**Satz 14.1** *Wenn $g$ stetig partiell differenzierbar ist, gibt es ein einer genügend kleinen Umgebung $(-c, c)$ von $a$ eine (eindeutig bestimmte) Lösung von (3) und (4).*

## 14.1 Trennung der Variablen

Wenn (3) die Gestalt

$$y' = g(x)h(y)$$

hat, findet man die Lösung folgendermaßen: Man integriert beide Seiten der Gleichung

$$g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y$$

und erhält

$$\int_a^x g(s)\ \mathrm{d}s = \int_b^y \frac{1}{h(t)}\,\mathrm{d}t,$$

eine Gleichung zwischen $x$ und $y$, die die Lösungskurve beschreibt.

## 14.2 Exakte Differentialgleichungen

Eine exakte Differentialgleichung hat die Gestalt

$$y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)},$$

wobei $g_y + h_x = 0$.

Dann ist $g(x,y)\,\mathrm{d}x - h(x,y)\,\mathrm{d}y$ eine geschlossene Differentialform. Man sucht mit der Methode von 13.2 ein Stammfunktion $F$ mit $F(a,b) = 0$. Dann beschreibt die Gleichung $F(x,y) = 0$ die Lösungskurve. Die Gleichung ist

$$\int_a^x g(s,b)\,\mathrm{d}t = \int_b^y h(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

## 14.3 Lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung haben die Gestalt

$$y' = g(x)y + h(x). \tag{5}$$

Zuerst suchen wir eine Lösung $f_0$ der homogenen Gleichung $y' = g(x)y$ mit der Nebenbedingung $y(a) = 1$ (Trennung der Variable):

$$f_0(x) = \exp\left(\int_a^x g(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Dann bestimmt man $c(x)$ so, daß

$$f(x) = c(x)f_0(x)$$

eine Lösung von (5) und (4) ist. Dazu muß $c(x)$ eine Lösung von $y'f_0(x) = h(x)$ und (4) sein:

$$c(x) = \int_a^x \frac{h(s)}{f_0(s)}\,\mathrm{d}s.$$

# Index